Barbier del. *Bolt sculp.*

Ἄριστον μὲν ὕδωρ.

Grundlehren
der
Hydraulik
oder
desjenigen Theiles
der Mechanik
welcher
von der Bewegung und dem Widerstande flüssiger Materien handelt.

Von
Abel Bürja.

Berlin,
bei F. T. Lagarde
1792.

An

Seine Excellenz

den

Herrn Grafen von Herzberg,

wirklichen geheimen Etatsminister, Ritter des schwarzen Adler-Ordens, Kurator der Königlichen Akademie der Wissenschaften rc.

Hochgebohrner Graf,

Hochgebietender Herr Staatsminister,

Gnädiger Herr!

Ew. Hochgräflichen Excellenz erdreiste ich mich diese Schrift, als ein geringes Merkmal meiner Ergebenheit, zu widmen. Ich würde es wagen, bei dieser Veranlassung durch das gerechteste Lob die tiefe Ehrfurcht an den Tag zu legen, womit ich für den erhabnen Verpfleger der deutschen Musen durchdrungen bin: allein was könnte ich von Dessen bewundernswürdigen Einsichten, Arbeiten und Veranstaltungen sagen, das nicht schon längst in der ganzen anfgeklärten Welt bekannt wäre? Ich muß mich also begnügen, für dieses unbedeutende Opfer um Nachsicht zu flehen. Ew. Hochgräfliche Excellenz geruhen, bei mir den guten Willen für die That anzunehmen, und mir ferner Dero huldreiche Beschützung angedeihen zu lassen.

Ich verharre in tiefster Ehrfurcht

Ew. Hochgräflichen Excellenz

gehorsamster Diener.

Abel Bürja.

Berlin, im Maimonat 1792.

Vorrede.

Ich überreiche nun dem Leser die vor einem Jahre versprochene Schrift, welche entweder als ein besonderes Werk, oder auch als der vierte Theil meiner Mechanik betrachtet werden kann. Dieses Buch wurde als eine Hydrodynamik angekündiget, es erscheinet aber unter den Titel einer Hydraulik. Diese kleine Abänderung habe ich deswegen getroffen, weil in der Zwischenzeit andere hydrodynamische Schriften erschienen sind, mit welchen die meinigen vielleicht von Unkundigem hätte verwechselt werden können. Uebrigens laufen beide Benennungen auf eines hinaus. Denn Hydrodynamik, auf Deutsch übersetzt, bedeutet die Wasserkraftlehre, nnd Hydraulik die Wasserröhrenkunst. Der erstere dieser Namen beziehet sich mehr auf das Theoretische, und der letztere auf das Praktische; der eigentliche Gegenstand aber auf den sie zielen, ist derselbige, nämlich die Bewegung des Wassers oder der flüssigen Dinge überhaupt.

Die Bestimmung und Berechnung dieser Bewegung ist noch manchen Schwierigkeiten unterworfen, und dieser Theil der angewandten Mathematik bedarf noch verschiedener Berichtigungen und Ergänzungen. Zwar haben sich die größten Mathematiker beflissen, das Mangelnde zu ersetzen und die Lücken zu füllen; sie haben aber bisher nicht allemal das Glück gehabt, auf solche einfache

Regeln und Formeln zu verfallen, die auf eine bequeme Art in praktischen Fällen angewandt werden können. Sie sind auch nicht allemal in ihren Prinzipien ganz einig mit einander. Dieses ist nicht zu bewundern, da es hier hauptsächlich auf Versuche im Großen ankömmt, wovon verschiedene uns bisher noch fehlen.

Indessen, ob wir gleich in der Hydraulik von der Vollkommenheit weit entfernet sind, so ist dasjenige was entweder ganz ausgemacht, oder doch zu einem hohen Grade der Wahrscheinlichkeit erhoben worden, gewiß nicht zu verachten; und der Hydrauliker der sich dieser, zwar noch mangelhaften aber doch brauchbaren Theorie bedienet, wird allemal sicherer gehen, als andere die gar keine Theorie besitzen, und es bloß bei dem alten Herkommen bewenden lassen.

Da ich nicht für eigentliche Gelehrten schreibe, sondern hauptsächlich für solche Personen, welchen die angewandte Mathematik in ihren Berufsgeschäften nützlich seyn kann, so habe ich mich nicht in sehr tiefsinnigen Berechnungen einlassen wollen. Ich habe mir solche Leser gedacht, die zwar einen guten Grund in der reinen Mathematik geleget haben, auch etwas von den höheren Rechnungen verstehen, aber aus diesen ihr Hauptgeschäfte nicht machen. Durch die Weglassung dieser tiefsinnigen Untersuchungen, die doch bis jetzt zu keinen recht brauchbaren Resultaten geführet haben, ist die eigentliche Hydraulik, nach dem gewöhnlichen Verstande dieses Wortes, ziemlich kurz ausgefallen. Dafür aber habe ich ein paar Hauptstücke der Be-

wegung

wegung fester Körper in flüssigen Materien, und besonders in der Luft, gewidmet. Hierzu gehöret die Lehre von geschossenen Kugeln, wovon ich wenigstens die Anfangsgründe nach Anleitung des Bombardier Prussien vorgetragen habe. Es sind aber nur Anfangsgründe, wodurch sich junge Mathematiker zur Lesung des angeführten Buches, wovon wie ich höre, bald eine neue verbesserte Ausgabe erscheinen soll, vorbereiten können.

Endlich, da ich mit diesem Werke meine Mechanik endige, so bin ich in einem Anhange zur Statik zurückgekehret, und habe die wichtige und allgemein brauchbare Lehre vom Gleichgewichte bei Maschinen, noch einmal vorgenommen, um sie auf eine andere Art, als gewöhnlich geschiehet zu behandeln.

Ich kehre zur Hydraulik oder Hydrodynamik zurück. Was den bloß praktischen Theil dieser Wissenschaft betrift, nämlich die Kunst das Wasser zu leiten, und es zur Bewegung der Maschinen zu gebrauchen, so scheinet es, daß schon die alten Griechen und Römer eine ziemliche Fertigkeit darin erlanget hatten. Ihre Arbeiten in diesem Fache zeigen von ihrer Geschicklichkeit. Was aber die Theorie anbelanget, so ist diese erst eigentlich im jetzigen Jahrhunderte entstanden. Torricelli, Newton, Varignon, Daniel Bernoulli, Maclaurin, Johann Bernoulli, Clairaut, d'Alambert, Euler, de la Grange, sind die gelehrten Männer, die sich am meisten bemühet haben, die Lehren der Hydrodynamik aus sicheren Gründen herzuleiten. Hiernächst haben sich verschiedene andere damit beschäftiget, diese Lehre, so viel es thunlich war, auf die Ausübung anzuwenden; hierin haben sich Kästner, Bossut, Bernard, Langsdorf, und andere hervorgethan.

Den sinnreichen Schriften aller dieser Männer habe ich das meiste zu verdanken was in diesem Werke enthalten ist; mir gehöret fast weiter nichts als der Vortrag und die Lehrart, nebst einigen neuen Beweisen und Versuchen.

In meinen vorigen mathematischen Schriften hatte ich bei höheren Rechnungen das Differenzial mit d und das Integral mit ſ bezeichnet. Dieses war mir erlaubet, weil ich annehmen konnte, daß sich junge Leser an diese Bezeichnungen gewöhnen würden. Da aber das gegenwärtige Werk von der Beschaffenheit ist, daß es vermuthlich auch von Personen gebrauchet werden wird, die schon an die alten Zeichen *d* und *∫* gewohnt sind, so habe ich einen Mittelweg genommen, und habe mit Herrn de la Grange die Antiqua-Buchstaben d und ſ gebrauchet. Diese Buchstaben sind also hier bloße Differenzial- und Integral-Zeichen; hingegen wo *d* und *∫* mit Kursiv-Schrift gedrucket sind, da bedeuten sie, wie gewöhnlich, gewisse Größen die in den Rechnungen vorkommen. Nur im dritten Bogen, von der 33sten bis zur 42sten Seite ist es durch ein Mißverständniß geschehen, daß *d* und *∫* anstatt d und ſ gesetzet worden. Da aber hier diese Buchstaben nur als bloße Operations-Zeichen und in keinem andern Verstande, vorkommen; so verursachen sie keine Zweideutigkeit. Ich habe also nicht für nöthig erachtet, den Bogen wegen dieses Versehens, umdrucken zu lassen.

Inhalt.

Achtes

Erstes Hauptstück.

Von der Bewegung des Wassers, wenn es durch eine kleine Oefnung aus einem Gefäße abfließt.

§. 1.

Die Hydrodynamik, welche der Gegenstand dieser Schrift ist, bestehet in der Lehre von den Bewegungen flüssiger Materien.

§. 2.

Unter allen flüssigen Materien ist das Wasser die bekannteste, und in Kunstwerken die gebräuchlichste. Wir werden uns also vor allen Dingen mit dem Wasser zu beschäftigen haben. Was wir vom Wasser sagen werden, wird sich auf jede Flüssigkeit anwenden lassen, die, wie das Wasser, nur wenig zusammenhängend oder klebricht, und fast gar nicht elastisch ist. Wir werden in der Folge sehen, daß elastische Flüssigkeiten, wie zum Beispiel die Luft ist, fast den nämlichen Regeln wie die unelastischen unterworfen sind.

§. 3.

In der Hydrostatik pfleget man mit der Betrachtung des in einem Gefäße ruhenden Wassers den Anfang zu machen. Hier, in der Hydrodynamik, können wir ebenfalls anfänglich ein Gefäß voll Wassers betrachten. Wir müssen aber irgendwo in dem Boden oder in den Wänden des Gefäßes eine Oefnung machen, und das Wasser heraus spritzen lassen, um dessen Bewegung zu untersuchen. Wir wollen fürs erste annehmen, daß die Oefnung sehr klein sei, so daß das Wasser im größten Theile des Gefäßes sich nur wenig bewege, und die Bewegung nur in der Nähe der Oefnung beträchtlich werde. Wir wollen auch anfänglich diese Bedingung hinzusetzen, daß das abfließende Wasser allmählig so sacht als möglich von oben ersetzet werde, so daß der Wasserspiegel, das heißt, die Oberfläche des Wassers im Gefäße, immer ohngefähr in der nämlichen Lage und Höhe bleibe.

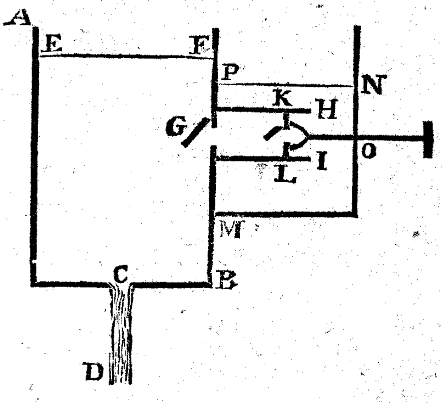
§. 4.

Gegen dieses Ersetzen des abfließenden Wassers haben manche Schriftsteller Einwendungen gemacht; sie meinen dieses könne nicht anders geschehen, als wenn man Wasser aus einer gewissen Höhe oberhalb des Wasserspiegels zugießt oder zufließen läßt; dieses zufließende Wasser müsse also nothwendig durch seinen Fall, mit einer gewissen Kraft auf das im Gefäße vorhandene Wasser wirken, und eine Veränderung in der Geschwindigkeit des Ausflusses verursachen

Indessen da wir annehmen, daß der Wasserspiegel, wegen der Kleinheit der Oefnung nur wenig sinket, so ist auch nur wenig Zuschuß nöthig; das Zugießen kann demnach sehr gelinde geschehen, und die etwanige Wirkung davon kann nicht beträchtlich sein. Allenfalls kann man kurze Zwischenzeiten ohne Zufluß verstreichen lassen, um die Bewegung des ausfließenden Wassers in denselben zu betrachten; weil doch die Wirkung des Zuschusses nicht lange Zeit dauren kann.

Zu noch mehrerer Sicherheit könnte man das Wasser auch von der Seite des Gefäßes, unterhalb des Wasserspiegels, hineinzwingen.

Es



Es sei zum Exempel AB ein Gefäß, woraus, vermittelst einer kleinen Oefnung C der Wasserstral CD fließt, und es solle der Wasserspiegel ohngefähr in der Höhe EF erhalten werden. Man verbinde mit dem Gefäße eine zylindrische Röhre GHI, mit einem einwärts gehenden Ventil bei G, und einem Stempel KL, an welchem sich ebenfalls ein Ventil einwärts befinde. Der Stempel muß vermittelst eines Stockes regieret werden. Die Röhre samt dem Stempel müssen in einem anderen Gefäße MN beständig unter Wasser stehen; der Stock muß bei O durch die Wand dieses zweiten Gefäßes gehen, und die Oefnung worin er spielet, muß mit Leder oder auf eine andere Art so wohl verwahret werden, daß kein Wasser durchkomme. Nun braucht man nur ganz leise zu pumpen, um neues Wasser in das erste Gefäß AB hineinzustoßen. Da dieses Wasser gar keinen Fall hat, so kann es auch keine merkliche Störung im ersten Gefäße verursachen. In den Behälter MN kann man es so plötzlich gießen, als man will; nur muß hier der Wasserspiegel PN niedriger sein, als der andere EF, sonst würde das Wasser des Behälters MN von selbst beide Ventile öfnen, und in das Gefäß AB fließen,

 bis

bis daß beide Wasserspiegel in einer und derselbigen horizontalen Ebne wären, wie schon aus der Hydrostatik bekannt ist.

Diese Einrichtung habe ich nur deswegen vorgeschlagen, um zu zeigen, daß es doch möglich ist, das abfließende Wasser ohne Wasserfall zu ersetzen. Indessen ist so viel Vorsicht kaum nöthig, und man kann sich bei Versuchen mit einem leisen, allenfalls wie kurz vorher gesaget worden, dann und wann unterbrochenen Zugießen begnügen.

§. 5.

Wenn Wasser durch eine Oefnung, hauptsächlich durch eine kleine, aus einem Gefäße fließt, so schießen die unteren Wassertheilchen, in konvergirenden Richtungen nach der Oefnung hin; diese Richtungen können sich nicht plötzlich verändern, sondern die Folge davon spüret man noch ausserhalb der Oefnung, bis zu einer Entfernung, die bei einer runden Oefnung etwa den halben Durchmesser derselben betragen mag. Nämlich der Wasserstral verengert sich bis zu dieser Entfernung, wo er am dünnesten ist, so daß sein Durchschnitt nur ohngefähr $\frac{2}{3}$ der Oefnung am Flächen-Inhalte beträgt. Weiterhin dehnet sich der Stral meistens wieder aus, welches von der Luft herrühret, die das Wasser zertheilet.

Die Verengerung des Wasserstrals rühret auch zum Theile daher, daß das Wasser am Rande der Oefnung hängen bleibt, oder doch verspätet wird, unterdessen daß dasjenige, welches mitten durch die Oefnung gehet, mit der gehörigen Geschwindigkeit abfließt, und fast allein durch den engsten Durchschnitt gehet.

§. 6.

Der engste Durchschnitt des Wasserstrals muß eigentlich, wenn es auf die Menge des ausfließenden Wassers ankömmt,

ankömmt, als die wahre Oefnung des Gefäßes angesehen werden, indem nicht mehr Wasser abfließt, als durch diesen Durchschnitt gehet. Man kann ihn daher die reduzirte Oefnung nennen, und die andere hingegen die wirkliche. Die reduzirte Oefnung beträgt demnach in den gewöhnlichsten Fällen $\frac{2}{3}$ der wirklichen am Flächen-Inhalte. Ist die Oefnung zirkelrund, so verhält sich demnach der Durchmesser der wirklichen Oefnung zum Durchmesser der reduzirten wie 1 zu $\sqrt{\frac{2}{3}}$, das ist ohngefähr wie 1 zu $\frac{14}{17}$, oder wie 17 zu 14.

§. 7.

Wenn man anstatt einer bloßen Oefnung eine kleine zylindrische oder prismatische Röhre anbringt, so verengert sich der Wasserstral nicht, sondern er ergießt sich aus voller Mündung. Denn in diesem Falle klebet, der ganzen Länge nach, ein Theil des ausfließenden Wassers an der innern Wand der Röhre, und wird nicht nur dadurch selbst aufgehalten, sondern verspätet auch das übrige in der Mitte durchfließende Wasser. Denn das Wasser ist nicht vollkommen flüßig, sondern etwas klebricht, zähe oder zusammenhängend. Auf diese Art wird und bleibet die Röhre ganz voll, oder wenn ja noch nächst an dem Gefäße in derselben eine Verengerung des Wasserstrals Statt findet, so ist sie doch geringer, als bei einer bloßen Oefnung. Daraus ist leicht zu erachten, daß der durch eine kleine Röhre fließende Wasserstral zwar dicker ist, als wenn er durch eine bloße Oefnung käme, daß aber das Wasser etwas langsamer fließt, eben deswegen, weil es durch den Zusammenhang mit der Röhre aufgehalten wird.

Uebrigens muß die angesetzte Röhre weder zu kurz, noch zu lang sein. Ist sie zu kurz, so hänget sich das Wasser nicht daran, sondern es fließt wie aus einer bloßen Oefnung; ist sie zu lang, so wird das Wasser in der ganzen Länge derselben durch den Zusammenhang mit ihr, zu sehr aufgehalten, und fließt nicht frei genug. Die angesetzte Röhre muß demnach so lang sein, daß der sich wieder ausbreitende Wasserstral ihre inneren Wände berühren könne. Da der Wasserstral sich nicht so bald wieder verbreitet, als er sich verengt hat, so mag es wohl nöthig sein, die angesetzte Röhre zwei- oder dreimal so lang zu machen, als den Durchmesser der Oefnuug.

§. 8.

Bei Untersuchungen über Wasser, welches aus solchen Gefäßen fließet, die immer gleich voll erhalten werden, kömmt es hauptsächlich auf den Unterschied der Höhen der Oefnung und des Wasserspiegels im Gefäße an. Diesen Unterschied wollen wir kurz die *Wasserhöhe* nennen. Es ist eigentlich eine lothrechte Linie, die von der Oefnung bis zur (nöthigefalls verlängerten) Oberfläche des im Gefäße befindlichen Wassers gehet. Wenn die Oefnung nicht im horizontalen Boden des Gefäßes, sondern an einer andern Stelle angebracht ist, so kann man die Wasserhöhe ohngefähr von der Mitte derselben an rechnen, da in diesem Falle nicht alle Punkte der Oefnung in gleicher Höhe sind. Hier kömmt es auf eine so große Genauigkeit nicht an, indem nur von kleinen Oefnungen die Rede ist.

Fließt das Wasser durch eine kurze Röhre ab, so wird die Wasserhöhe von der Stelle an gerechnet, wo die wirkliche Oefnung des Gefäßes ist, und ebenfalls von der Mitte dieser Oefnung, wenn sie nicht horizontal ist.

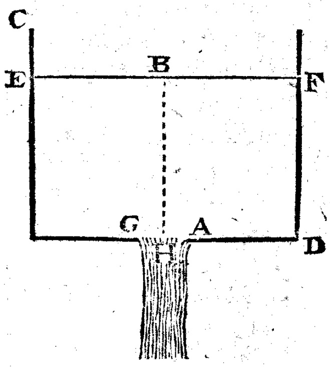
§. 9.

Lehrsatz.

Wenn ein Gefäß immer gleich voll erhalten wird, und wenn die Oefnung klein ist, so entspricht

spricht die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers, der Wasserhöhe; das heißt, sie ist gleich der Geschwindigkeit, die ein im leeren Raume fallender Körper erhält, wenn er von einer Höhe herunter fällt, welche der Wasserhöhe gleich ist.

Dieser Lehrsatz ist einer der wesentlichsten in der Hydrodynamik, und giebt den Grund zur Auflösung vieler Aufgaben. Die Erfahrung bestätiget ihn hinlänglich. Indessen scheinen die Beweise, die man davon zu geben pfleget, nicht so einleuchtend zu sein, als man es wohl wünschen möchte. Ich will hier einen Versuch zu einem neuen Beweise machen, den ich für so überzeugend halte, als man ihn in physiko-mathematischen Dingen, verlangen kann.



Es sei AG eine kleine Oefnung im Boden des Gefäßes CD, und EF sei der Wasserspiegel. Man betrachte ein einziges Wassertheilchen H in der Oefnung, so leidet dieses, vermöge der Hydrostatik, einen Druck, der so viel beträgt, als das Gewicht einer Wassersäule, welche nicht mehr Grundfläche hat, als das Theilchen H, und deren Höhe HB bis an den Wasserspiegel reichet. Dieser Druck ist nichts anders, als die Summe aller Stöße, welche die Fallkraft jedem einzelnen Theilchen der Säule HB in einem Augenblicke giebt. So lange das Theilchen H unterstützet ist, erfolget weiter keine Wirkung; so bald es aber nicht mehr unterstützet ist, fänget es an zu fallen; aber nicht mit der Geschwindigkeit eines einzelnen fallenden Körperchens, sondern mit einer Geschwindigkeit, die aus allen Stößen entstehet, welche die Theilchen der Säule HB zugleich von der Fallkraft empfangen.

Und diese Geschwindigkeit ist die nämliche, als wenn das Theilchen H, von B bis H frei herunter gefallen wäre. Denn, wenn man, in dieser Voraussetzung die Zeit des Fallens in eben so viel unendlich-kleine Theilchen zerleget, als Wassertheilchen in HB sind, so empfängt das fallende Pünkchen H in jedem Zeittheilchen einen Stoß von der Fallkraft: die Wirkung eines solchen Stoßes dauert fort, und es kommen immer noch die Wirkungen der folgenden Stöße hinzu. Die Wirkung aller Stöße ist demnach zuletzt der Summe aller einzelnen Stöße gleich, folglich dieselbige, als wenn alle Stöße auf einmal geschehen wären, folglich so groß, als die augenblickliche Wirkung der Fallkraft auf den Punkt H vermittelst aller Theilchen der Säule HB. Also bekömmt das Pünktchen H einerlei Geschwindigkeit, es sei daß es durch den Druck der Wassersäule BH herausgetrieben werde, oder daß es von B bis H frei heruntergefallen sei.

Da nun das nämliche von allen Wassertheilchen gilt, die in der Oefnung AB enthalten sind, so gehet das Wasser durch diese Oefnung mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe BH entspricht, wie man der Kürze halben, zu reden pfleget, das heißt, die so groß ist, als die Geschwindigkeit jedes Körpers im leeren Raume sein würde, wenn er in B losgelassen worden und von dort bis H gefallen wäre.

Zusatz I. Wir haben in der Figur varausgesetzet, daß die Oefnung im waagerechten Boden angebracht ist. Der

Der Beweis gilt aber eben so gut, wenn sie in einer Vertikalen, oder auch schief gegen den Horizont geneigten Wand gemacht ist. Denn der Druck, welcher hier die Ursache der Bewegung ist, richtet sie bloß nach der Wasserhöhe, wie die Hydrostatik lehret, ohne Rücksicht auf die Gestalt des Gefäßes, oder auf die Lage der Gedrückten Fläche.

Zusatz II. Wenn in einem Gefäße mehrere kleine Oefnungen vorhanden sind, so gilt der Lehrsatz von jeder insbesondere, wenn sie nur alle zusammen so wenig Wasser durchlassen, daß im Wasser des Gefäßes keine merkliche Bewegung entstehe.

Zusatz III. Da sich der ausfließende Wasserstral verengert (§. 5.), so entstehet die Frage: an welcher Stelle eigentlich die der Wasserhöhe entsprechende Geschwindigkeit Statt findet, entweder in der Oefnung selbst, oder an der Stelle, wo der Wasserstral am engsten ist. Genau zu reden, müßte sie an beiden Stellen Statt finden, wenn man nur die Wasserhöhe bis an den Ort rechnet, von welchem die Rede ist. Nämlich in der Oefnung gehet die Wasserhöhe von der Oefnung an, und im engsten Durchschnitte, vom engsten Durchschnitte an, bis zur Oberfläche des Wassers im Gefäße. Indessen lehret die Erfahrung, daß weder in der Oefnung, noch in dem engsten Durchschnitte, die Geschwindigkeit der Wasserhöhe ganz vollkommen entspricht, weil verschiedene Hindernisse vorhanden sind, wodurch die Bewegung etwas verspätet wird. (Siehe unten den VIten Zusatz.)

Wenn anstatt einer bloßen Oefnung eine kurze Röhre angebracht wird, so muß die Wasserhöhe von der wirklichen Oefnung an gerechnet werden (§. 8), die Geschwindigkeit aber ist in diesem Falle noch etwas geringer als durch eine bloße Oefnung (§. 7).

Zusatz IV. Bei dem Beweise kömmt die spezifische Schwere der ausströmenden Flüssigkeit gar nicht in Betrachtung. Also entspricht die Geschwindigkeit allemal ohngefähr der Höhe, es mag Wasser oder Quecksilber, oder eine andere Flüssigkeit aus dem Gefäße strömen. Zwar scheinet es, daß bei Flüssigkeiten die schwererer Art sind, der Druck der Säule HB stärker sei, dagegen aber haben die herauszutreibenden Theilchen mehr Masse; und wenn die zu bewegende Masse wie die Kraft zunimmt, so bleibet die Geschwindigkeit unverändert.

Zusatz V. Der Beweis gilt nur von kleinen Oefnungen, weil nur bei diesen das obere Wasser die unteren Theilchen beinahe so drücket, als wenn das obere Wasser in Ruhe wäre. Ist die Oefnung groß, so entfliehet das untere Wasser in zu großer Menge, und sinket zu schnell im Gefäße, als daß das obere mit seiner vollen Schwere auf dasselbe drücken könnte. Ein Gewicht drücket weniger auf eine Hand, die sich geschwinde niederwärts beweget, als auf eine, welche ruhet, oder sich nur ganz langsam von oben nach unten beweget. So ist es auch hier mit dem oberen und unteren Wasser im Gefäße.

Zusatz VI. Bei dem Beweise sind alle Hindernisse aus der Acht gelassen worden, wodurch die Bewegung des Wassers vermindert werden kann; als da sind: der Widerstand der Luft gegen das auslaufende Wasser; die Reibung des Wassers an dem Gefäße, hauptsächlich in der Nähe der Oefnung, und in der Röhre, wenn eine vorhanden ist; die Klebrichkeit des Wassers, u. s. w. Also kann der Erfolg in Versuchen der Theorie nie vollkommen entsprechen.

Indessen ist doch die Abweichung nicht sehr beträchtlich, hauptsächlich wenn das Gefäß eine hinlängliche Weite hat, und die Oefnung nicht zu groß, und auch nicht gar zu klein ist. Im leztern Falle ist die Bewegung durch die Oefnung nicht frei genug.

§. 10.

§. 10.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Wasserhöhe die Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers finden, vorausgesetzet, daß die Oefnung klein, und das Gefäß immer gleich voll sei.

Auflösung. Es sei die Wasserhöhe h, und die Geschwindigkeit eines Körpers, der im freien Raume von der Höhe h gefallen ist, sei v, so ist, vermöge der dynamischen Grundsätze,

$$v = \sqrt{2ph}$$

wo unter p die vom fallenden Körper nach der ersten Sekunde erhaltene Geschwindigkeit verstanden wird; und diese Größe $\sqrt{2ph}$ ist auch zugleich die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers (§. 9).

Zusatz. Wenn man die Zeit in Sekunden, und die Längen in Rheinländischen Fußen rechnet, so weiß man aus der Erfahrung, daß $p = 31,253$, also $2p = 62,506$, und $\sqrt{2p} = 7,90607$, und $\log. \sqrt{2p} = 0,8979608$. Da nun $v = \sqrt{2ph}$, so ist auch $v = \sqrt{2p} . \sqrt{h}$, oder

$$v = (7,90607) \sqrt{h}$$

und $\log. v = 0,8979608 + \frac{1}{2} \log. h$.

Exempel. Es sei die Wasserhöhe $h = 3$ Fuß 7 Zoll 5 Linien, Rheinländisch Maaß, so muß erstlich diese Höhe in lauter Fußen ausgedrücket werden.

3 Fuß	- - -	$= 3,0000$ Fuß
7 Zoll $= \frac{7}{12}$ Fuß	-	$= 0,5833$
5 Linien $= \frac{5}{144}$ Fuß	-	$= 0,0347$
	h	$= 3,6180$ Fuß
	$\log. h$	$= 0,5584686$
	$\frac{1}{2} \log. h$	$= 0,2792343$
	hierzu	$0,8979608$
	$\log. v$	$= 1,1771951$
	also v	$= 15,038$.

Also

Also läuft das Wasser aus der kleinen Oefnung mit einer Geschwindigkeit von etwas mehr als 15 Fuß für jede Sekunde, das heißt, wenn es in einer geraden zylindrischen oder prisantischen Säule bliebe, so würde in jeder Sekunde eine 15 Fuß lange Säule aus der Oefnung heraus kommen.

Anmerkung I. Die der Wasserhöhe entsprechende Geschwindigkeit erhält das ausfließende Wasser sogleich, oder doch nach einer äußerst kurzen Zeit, und diese Geschwindigkeit bleibet hernach unverändert, wenn das Wasser im Gefäße den gehörigen Zufluß bekömmt, und die Wasserhöhe unverändert bleibet.

Anmerkung II. Man muß sich nicht wundern, wenn es sich bei Versuchen, vermöge der ausgeflossenen Wassermenge zeiget, daß die Geschwindigkeit etwas kleiner ist, als sie nach der Theorie sein sollte. Man bedenke nur die verschiedenen Hindernisse, die hier der freien Bewegung zuwider sind (§. 9. Zus. VI).

§. 11.

Aufgabe.

Wenn die Geschwindigkeit des ablaufenden Wassers gegeben ist, so soll die dazu erforderliche Wasserhöhe gefunden werden, vorausgesetzet daß das Gefäß immer gleich voll bleibe, und die Oefnung klein sei.

Da $v = \sqrt{2ph}$ (§. 10)

oder $v^2 = 2ph$

so ist $h = \dfrac{v^2}{2p}$

Man kann hier das Exempel des vorigen Paragraphs umkehren, und fragen: Wenn das Wasser mit einer Geschwindigschwindigkeit von 15,038 Fuß für jede Sekunde laufen soll, wie hoch muß das Wasser im Gefäße über der Oefnung stehen, oder wie tief muß die Oefnung unterhalb der Wasserfläche gemachet werden? Die Ausführung überlasse ich dem Leser.

Anmerkung. Die gefundene Höhe wird in der Anwendung allemal etwas vergrößert werden müssen, auf daß der stärkere Druck dasjenige ersetze, was, durch verschiedene Hindernisse, von der Geschwindigkeit abgehet (§. 9, Zus. VI).

§. 12.

Lehrsatz.

Bei Gefäßen, welche immer, jedes für sich, gleich voll bleiben, und kleine Oefnungen haben; oder auch bei demselbigen Gefäße, wenn es gleich voll bleibet und kleine Oefnungen hat; verhalten sich die Geschwindigkeiten der ablaufenden Wässer, wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen.

Denn es ist (§. 10)

$$v = \sqrt{2ph}$$

$$\text{oder } v = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{h}$$

Da hier $\sqrt{2p}$ eine beständige Größe ist, so nimmt v ab und zu, nach dem nämlichen Verhältnisse wie $\sqrt{h}$.

Zusatz. Es wird billiger Weise $\sqrt{2p}$ als eine unveränderliche Größe betrachtet. Indessen ist sie es nicht nach aller Strenge; indem die Geschwindigkeit fallender Körper auf Bergen, und näher am Aequator etwas abnimmt.

Also wird eigentlich, bei derselbigen Wasserhöhe, das ausströmende Wasser um desto langsamer fließen, je weiter man sich über die Erdfläche erhebet, oder auch, je näher

näher man dem Aequator kömmt. Indessen betragen diese Umstände meistens nur sehr wenig, und fallen auch selten vor, so daß man sie aus der Acht lassen kann.

§. 13.

Aufgabe.

Die Menge des in einer gewissen Zeit ausgeflossenen Wassers finden, wenn die Geschwindigkeit und die Größe der Oefnung bekannt sind.

Es sei die Größe der Oefnung in Quadratfußen gerechnet, f; die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers betrage v Fuß in einer Sekunde, und z sei die Zeit in Sekunden. In jeder Sekunde gehet durch die Oefnung eine Wassersäule, welche f zur Grundfläche und v zur Höhe hat, deren körperlicher Inhalt demnach fv ist. Während daß z Sekunden verfließen, gehen also z solche Säulen durch, und diese betragen demnach fvz. Wird also die Menge des ausfließenden Wassers durch m angedeutet, so ist

$$m = fvz$$

das heißt, die Menge wird gefunden, wenn man die Oefnung mit der Geschwindigkeit, und das Produkt noch mit der Zeit multipliziret.

Zusatz I. Wenn man in diese Gleichung $m = fvz$, anstatt der Geschwindigkeit v ihren Werth $\sqrt{2ph}$ setzet (§. 10), so ist auch

$$m = fz\sqrt{2ph}$$

Zusatz II. Wenn man Versuche in Betreff der Menge des ausfließenden Wassers machen will, so darf man es nur in ein prismatisches oder zylindrisches Gefäß auffangen, und dann den Kubik-Inhalt des angefüllten Theiles berechnen. Durch solche Versuche hat man gefunden, daß

allemal

allemal weniger Wasser ausfließt, als die Rechnung nach den letzten Formeln angiebt.

Zusatz III. Wenn eine bloße Oefnung vorhanden ist, so ist angemerket worden, daß der Wasserstral sich verengert, und daß der kleinste Durchschnitt desselben nur ohngefähr $\frac{2}{3}$ der Oefnung beträgt (§. 6). Aus diesem Grunde müßte auch schon das ausfließende Wasser nur $\frac{2}{3}$ der berechneten Menge $\frac{2}{3} fgz$ betragen. Es giebt aber noch andere Hindernisse, welche die Geschwindigkeit vermindern (§. 9, Zus. VI), und die Erfahrung lehret, daß die ausgeflossene Wassermenge nur $\frac{5}{8}$ von der berechneten fvz beträgt. Der Unterschied zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{8}$ ist $\frac{1}{24}$, also verursachen die übrigen Umstände noch eine Verminderung von $\frac{1}{24}$ der ausfließenden Wassermenge. Diese $\frac{5}{8}$ sind nur wegen der Kleinheit der Zahlen angegeben. Genauer hat Herr Bossüt gefunden, daß die ausfließende Wassermenge $\frac{10000}{16157}$ von fvz beträgt.

Zusatz. IV. Wenn die Oefnung mit einer kurzen Röhre versehen ist, so haben wir schon bemerket (§. 7), daß zwar die Geschwindigkeit etwas vermindert, hingegen der Wasserstral viel dicker wird. Die Verdickung des Wasserstrals ersetzet nicht nur, was durch die Abnahme der Geschwindigkeit verloren wird, sondern thut noch mehr. Denn man hat durch Erfahrungen gefunden, daß man in diesem Falle eine Wassermenge bekömmt, welche $\frac{13}{16}$ von fgz beträgt, da man durch eine bloße Oefnung nur $\frac{5}{8}$ oder $\frac{10}{16}$ von fgz bekam; der Unterschied beträgt $\frac{3}{16}$, oder fast $\frac{1}{5} fgz$.

Zusatz V. Zufolge der Bemerkungen, die in beiden vorigen Zusätzen enthalten sind, müssen die Formeln der Auflösung und des ersten Zusatzes verbessert werden, bevor man sie anwenden könne.

Wenn also das Wasser durch eine bloße Oefnung sprizet, so ist

$$m = \frac{10000}{16157} fvz = \frac{10000}{16157} fz\sqrt{2ph}$$

Fließt

Fließt es aber durch eine angesetzte kurze Röhre, so ist

$$m = \tfrac{13}{16}\, fgz = \tfrac{13}{16}\, fz \sqrt{2ph}$$

Zusatz VI. Da die Oefnungen meistens zirkelrund sind, so wollen wir die Formeln für diese Gestalt einrichten, damit die Rechnung in vorkommenden Fällen leichter werde. Es sei demnach der Durchmesser der zirkelrunden Oefnung $= d$, und es verhalte sich jeder Durchmesser zum Umkreise, wie 1 zu π, so ist die Oefnung $f = \frac{1}{4}\pi d^2$, folglich wird für den Fall, wo kein Mundstück vorhanden ist

d^2 $m = \frac{10000}{16157} \cdot \frac{1}{4}\, \pi z \sqrt{2ph}$

oder $\quad = \frac{10000}{64628}\, \pi\, d^2 z \sqrt{2ph}$

oder $m = \left(\frac{10000}{64628}\, \pi \sqrt{2p}\right) d^2 z \sqrt{h}$,

Laßt uns die im Haken eingeschlossene Zahl berechnen.

log. 10000	= 4,0000000	
log. π	= 0,4791499	
$\frac{1}{2}$ log. $(2p)$	= 0,8979608	(§. 10, Zus.)
Comp. log. 64628	= 5,1895793	
	0,5846900	

Zahl 3, 84318

Folglich ist für eine bloße Oefnung

$$m = (3{,}84318)\, d^2 z \sqrt{h}$$

Fließt aber das Wasser durch ein zylindrisches Mundstück, so ist

$$m = \tfrac{13}{16} \cdot \tfrac{1}{4}\, \pi d^2 z \sqrt{2ph}$$

$$m = \left(\tfrac{13}{64}\, \pi \sqrt{2p}\right) d^2 z \sqrt{h}$$

log. 13	= 1,1139434	
log. π	= 0,4971499	
$\frac{1}{2}$ log. $2p$	= 0,8979608	(§. 10, Zus.)
Comp. log. 64	= 8,1938200	
	0,7028741	

Zahl 5, 04516

Also

Also ist, für eine Oefnung mit einem Mundstücke

$$m = (5{,}04516)\ d^2 z \sqrt{h}$$

Exempel. Es sei die Tiefe der Oefnung unterhalb der Oberfläche des Wassers, oder mit einem Worte, die Wasserhöhe 15 Fuß 9 Zoll, Rheinländisch Maaß; die Oefnung selbst sei zirkelrund ohne Mundstück, und habe 1 Zoll im Durchmesser. Nun wird gefraget, welche Menge Wassers in einer Zeit von einer halben Stunde herausfließen wird, vorausgesetzet, daß das Gefäß immer voll erhalten werde.

Da die Oefnung zirkelrund ist, und kein Mundstück vorhanden ist, so gebrauchen wir die Formel (Zus. VI).

$$m = (3{,}84318)\ d^2 z \sqrt{h}$$

Diese Formel setzet voraus, daß die Zeit in Sekunden, und das Längenmaaß in Fußen ausgedrücket werde. Sie enthält schon die aus der Erfahrung bestimmte Verbesserung, und kann demnach unmittelbar gebrauchet werden. In gegenwärtigem Falle ist

$$d = 1 \text{ Zoll} = \tfrac{1}{12} \text{ Fuß}$$

$$z = \tfrac{1}{2} \text{ Stunde} = 1800 \text{ Sekunden}$$

$$t = 15 \text{ Fuß } 9 \text{ Zoll} = 15\tfrac{3}{4} = \tfrac{63}{4} \text{ Fuß}$$

Es ist also

$$m = (3{,}84318) \cdot \tfrac{1}{144}\ 1800 \cdot \sqrt{\tfrac{63}{4}}$$

oder da $\sqrt{\tfrac{63}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{63}$

$$m = (3{,}84318) \cdot \tfrac{1}{144} \cdot 900 \cdot \sqrt{63}$$

	log. (3,84318)	= 0,5846910
comp.	log. 144	= 7,8416375
	log. 900	= 2,9542425
½	log. 63	= 0,8996702
	log. m	= 2,2802412
	m	= 190,65 Kubikfuß.

Es mögen nun alle gegebene Größen wie vorher bleiben; laßt uns aber annehmen, daß an der Oefnung ein Mundstück von gehöriger Länge angebracht sei. Wenn nun die Zeit in Sekunden und das Längenmaaß in Fußen gegeben ist, so hat man (Zus. VI)

$$m = (5{,}04516)\ d^2 z \sqrt{h}$$

$d = \frac{1}{12}$ Fuß, $z = 1800$ Sekunden, $h = \frac{63}{4}$ Fuß,

und $m = (5{,}04516) \cdot \frac{1}{144} \cdot 900 \sqrt{63}$

	log. 5,04516	= 0,7028750
Comp.	log. 144	= 7,8416375
	log. 900	= 2,9542425
$\frac{1}{2}$	log. 63	= 0,8996702
	log. m	= 2,3984252
	m	= 250,28 Kubikfuß

Anmerkung. Man kann sich die Mühe einer doppelten oder dreifachen Rechnung ersparen. Denn die Wassermengen, wenn man sie nach der bloßen Theorie und nach den Erfahrungen berechnet, verhalten sich beinahe also

Theorie	Oefnung	Mundstück.
1	$\frac{5}{8}$	$\frac{13}{16}$
oder 16	10	13

Da also im vorigen Exempel für eine bloße Oefnung gefunden worden 190,65 so saget man: wie 10 zu 13, so ist 190,65 zu einer vierten Zahl, und man findet beinahe 248, welches mit der genauern Rechnung ziemlich stimmet. Will man wissen, was nach der bloßen Theorie herausgekommen wäre, so sage man: wie 10 zu 16, so ist 190,65 zu einer vierten Zahl. Diese ist 305. Also, ohne Verengerung des Strals, und ohne die anderen Hindernisse, wären ohngefähr 305 Kubikfuß Wassers ausgeflossen.

§. 1.

§. 14.

Aufgabe.

Bei einem Gefäße, welches immer gleich voll erhalten wird, und woran eine kleine Oefnung ist, werden drei von diesen vier Größen gegeben, Oefnung, Wasserhöhe, Zeit und Menge des abfließenden Wassers; es soll die vierte bestimmet werden.

Nach der bloßen Theorie haben wir (§. 13. Zus. I)

$$m = fz\sqrt{2ph}$$

daher $f = \frac{m}{z\sqrt{2ph}}$

$$z = \frac{m}{f\sqrt{2ph}}$$

$$h = \frac{m^2}{2pf^2z^2}$$

Nach der Erfahrung aber (§. 13, Zus. V) für Oefnungen ohne Mundstück

$$m = \tfrac{10000}{16157}\, fz\sqrt{2ph}$$

daher $f = \frac{16157\, m}{10000\, z\sqrt{2ph}}$

$$z = \frac{1{,}6757\, m}{f\sqrt{2ph}}$$

$$h = \frac{(16157)^2}{(10000)^2}\frac{m^2}{2pf^2z^2}$$

Ferner mit einem Mundstücke (§. 13, Zus. V)

$$m = \tfrac{13}{16}\, fz\sqrt{2ph}$$

$$\text{daher } f = \frac{16\,m}{13\,z\sqrt{2ph}}$$

$$z = \frac{16\,m}{13\,f\sqrt{2ph}}$$

$$h = \frac{(16)^2\,m^2}{(13)^2 \cdot 2pf^2z^2}$$

Bei allen diesen Formeln ist h die Wasserhöhe in Fußen, f die Oefnung in Quadratfußen, m die Menge in Kubikfußen, z die Zeit in Sekunden, p die doppelte Höhe, aus welcher ein Körper in einer Sekunde fällt, oder seine nach der ersten Sekunde des Falles erhaltene Geschwindigkeit.

Ferner, wenn die Oefnung zirkelrund und ihr Durchmesser d in Fußen ist, so ist für den Fall, wo kein Mundstück daran ist, nach der Erfahrung (§. 13, Zus. VI).

$$m = (3{,}84318)\,d^2\,z\sqrt{h}$$

$$\text{daher } z = \frac{m}{(3{,}84318)\,d^2\sqrt{h}}$$

$$d = \sqrt{\frac{m}{(3{,}84318)\,z\sqrt{h}}}$$

$$h = \frac{m^2}{(3{,}84318)^2\,d^4\,z^2}$$

Endlich, wenn die Oefnung zirkelrund, und mit einem Mundstücke versehen ist, so hat man (§. 13, Zus. VI).

$$m = (5{,}04516)\,d^2\,z\sqrt{h}$$

$$z = \frac{m}{(5{,}04516)\,d^2\sqrt{h}}$$

$d = \sqrt{}$

$$d = \sqrt{\frac{m}{(5,04516)\, z \sqrt{h}}}$$

$$h = \frac{m^2}{(5,04516)^2 d^4 z^2}$$

Es wäre überflüssig, Exempel von der Anwendung aller dieser Formeln anzuführen. Wer Lust dazu hat, kann sich selbst welche aufgeben. Die Rechnung wird allemal am bequemsten durch Logarithmen geschehen.

§. 15.

Lehrsatz.

Die Mengen der auslaufenden Wässer verhalten sich wie die Oefnungen, wie die Zeiten und wie die Geschindigkeiten; oder auch wie die Oefnungen, die Zeiten und die Quadratwurzeln der Wasserhöhen.

Diese Verhältnisse fließen unmittelbar aus den Gleichungen (§. 13, Zus. I)

$$m = fvz$$

oder $m = fz\sqrt{2ph} = fz\sqrt{2p}\sqrt{h}$

Denn wenn man sich alle Größen (ausgenommen $\sqrt{2p}$) als veränderlich gedenket, so nimmt das Produkt m zu oder ab, nach dem zusammengesgesetzten Verhältnisse der veränderlichen Faktoren.

Zusatz I. Wenn auch zu den Faktoren, die durch die Erfahrung gefundene Zahl $\frac{10000}{16157}$ oder auch $\frac{13}{16}$ hinzukömmt, so ändert dieses nicht die Verhältnisse, welche demnach auch in praktischen Fällen ihre Richtigkeit haben. Nur muß dabei angenommen werden, daß diese Zahl, wodurch die Resultate verbessert werden, wirklich allemal einerlei ist, und sich weder mit der Höhe, noch mit der Oefnung verändert. Die Erfahrung lehret wenigstens, daß man sie ohne großen Irrthum für unveränderlich halten kann.

Zusatz II. Wenn von denen Größen, die im zusammengesetzten Verhältnisse vorkommen, einige sich selbst gleich bleiben, so fallen sie in der Proporzion weg. Z. E. In gleichen Zeiten verhalten sich die Wassermengen wie die Oefnungen und wie die Quadratwurzeln der Höhen. Sind auch die Oefnungen gleich, so verhalten sich die Mengen wie die Quadratwurzeln der Höhen; u. s. w.

Zusatz III. Aus den Formeln des §. 14 könnten noch verschiedene Verhältnisse gezogen werden. Z. E. aus

$$z = \frac{m}{f\sqrt{(2ph)}}$$

folget, daß sich die Zeiten verhalten, wie die ausfließenden Wassermengen, und umgekehrt wie die Oefnungen, auch noch umgekehrt wie die Geschwindigkeiten, oder die Quadratwurzeln der Höhen. Indessen da der bloße Anblick der Gleichungen schon hinreichend ist, um diese Verhältnisse zu entdecken, so ist es unnöthig, sie alle in Worten auszudrücken.

§. 16.

Aufgabe.

Wenn das Gefäß immer gleich voll erhalten wird, und eine kleine Oefnung hat, so soll die Masse oder das Gewicht des in einer gewissen Zeit ausfließenden Wassers gefunden werden.

Es sei die Menge des in der gegebenen Zeit ausfließenden Wassers m in Kubikfußen, und die Dichtigkeit des Wassers oder die spezifische Schwere, oder, welches hier einer einerlei ist, das Gewicht eines Kubikfußes sei k, so ist, wenn man die Masse oder das Gewicht des Ganzen s nennet

$$s = mk$$

das heißt, die Masse wird erhalten, wenn man die Menge mit der Dichtigkeit multipliziret.

Exempel. In dem Exempel bei §. 13 wurde gegeben eine Wasserhöhe von 15 Fuß 9 Zoll, eine zirkelrunde Oefnung ohne Mundstück von 1 Zoll im Durchmesser, und eine Zeit von $\frac{1}{2}$ Stunde: die ausgeflossene Wassermenge wurde gefunden 190,65 Kubikfuß $= m$. Nun beträgt das Gewicht eines Rheinländischen Kubikfußes Wasser 65,9 Berliner Pfund $= k$.

Also ist in diesem Falle

$$s = (190{,}65) \times (65{,}9)$$

oder $s = 12564$ Pfund beinahe

oder $s = 114$ Zentner und 24 Pfund beinahe.

den Zentner zu 110 Pfund gerechnet.

Zusatz I. In die Formel $s = mk$, kann man, wenn man will, anstatt m alle die im §. 13 angezeigten Werthe des m setzen. Zum Exempel für zirkelrunde Oefnungen ohne Mundstück (§. 13, Zus. VI)

$$m = (3{,}84318)\ d^2 z \sqrt{h}, \text{ also}$$
$$s = (3{,}84318)\ d^2 z\ k\sqrt{h}$$

Zusatz II. Aus

$$s = mk$$

folget $k = \frac{s}{m}$

$$m = \frac{s}{k}$$

 aus

aus $s = (3,84318)\, d^2 z k \sqrt{h}$ läßt sich ebenfalls jede der Größen d, z, k, h in einer Funkzion der übrigen ausdrücken.

Zusatz III. Aus $s = mk$ folget, daß sich die Massen wie die Mengen und wie die Dichtigkeiten verhalten; aus $s = (3,84318)\, d^2 z k \sqrt{h}$, daß sich die Massen wie die Oefnungen (oder die Quadrate ihrer Durchmesser), wie die Zeiten, wie die Dichtigkeit und wie die Quadratwurzeln der Wasserhöhen verhalten. Und was dergleichen Verhältnisse mehr sind.

Anmerkung. Wir halten uns bei diesen Folgerungen wenig auf, weil ein jeder solche nöthigenfalls selbst entwickeln kann.

§. 17.

Lehrsatz.

Die anfängliche Richtung des ausfließenden Wasserstrals, ist allemal senkrecht auf der Ebne, worin die Oefnung gemacht ist.

Denn da die Bewegung des ausfließenden Wassers vom Drucke des oberen Wassers herrühret, und da dieser Druck, wie die Hydrostatik lehret, auf jede Stelle am Boden, oder an den Wänden des Gefäßes senkrecht ist, so muß auch die dadurch verursachte Bewegung dieselbige Richtung haben.

Zusatz. Wenn also die Oefnung horizontal und unterwärts gekehret ist, so spritzet das Wasser gerade niederwärts. Ist die Oefnung horizontal und oberwärts gekehret, so spritzet das Wasser gerade aufwärts. Wenn die Stelle, worin die Oefnung gemacht worden, entweder senkrecht, oder schief gegen den Horizont ist, so ist die anfängliche Richtung des Strals entweder horizontal oder schief gegen den Horizont; der Stral krümmet sich aber allmählig niederwärts, wegen der Schwere des Wassers.

Anmer-

Anmerkung. Wenn der Stral gerade niederwärts gehet, so ist nichts merkwürdiges dabei zu beobachten; gehet er gerade aufwärts, so hat man seine Höhe und andere Umstände zu betrachten; die wir im folgenden Hauptstücke, bei der Lehre von den Springwerken anführen werden. Gehet der Stral seitwärts, es mag die anfängliche Richtung horizontal sein oder nicht, so hat man seine Krümmung zu untersuchen, welches wir jezt thun wollen.

§. 18.

Lehrsatz.

Wenn der Wasserstral nicht in vertikaler Richtung, sondern schief aufwärts oder niederwärts gehet, so bildet er eine Parabel.

Denn jedes Wassertheilchen gehet aus der Oefnung mit einer gewissen Geschwindigkeit, welche in Verbindung mit der Fallkraft seine Bahn bestimmet: es ist demnach wie ein geworfener Körper zu betrachten, und beschreibet also, wie von solchen Körpern bekannt ist, eine Parabel. Und da alle Theilchen, die aus der Oefnung kommen, in gleicher Richtung und mit ohngefähr gleicher Geschwindigkeit geworfen werden, so beschreiben sie alle ohngefähr dieselbige Parabel.

Anmerkung. Der Widerstand der Luft kann zwar die Bahn etwas verändern, indessen lehret doch die Erfahrung, daß die Krümmung des Wasserstrals, wenigstens in einer nicht zu großen Weite von der Oefnung, ziemlich genau mit der Parabel stimmet.

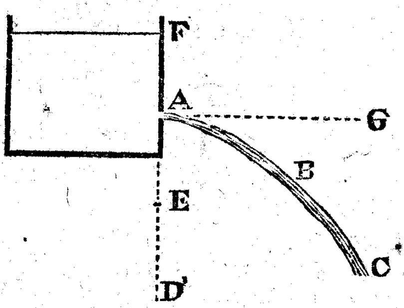
§. 19.

Aufgabe.

Die vom Wasserstral gebildete Parabel bestimmen, vorausgesezet, daß die Oefnung klein sei,

und daß die Wasserhöhe unverändert erhalten werde.

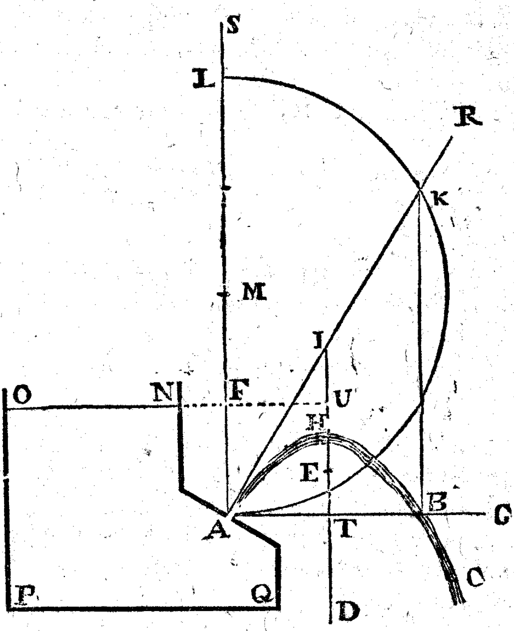
Es giebt hier drei mögliche Fälle. Denn es gehet der Stral anfänglich entweder horizontal, oder schief gegen den Horizont und aufwärts, oder schief gegen den Horizont und niederwärts.



1) Wenn der Wasserstral ABC anfänglich in horizontaler Richtung gehet, weil er nämlich durch eine Oefnung kömmt, die in einer vertikalen Fläche gemacht ist, so ziehe man AD von der Oefnung an lothrecht herunter. Auf dieser AD nehme man AE gleich der Wasserhöhe AF. Die anfängliche Richtung des Strals verlängere man in AG. Durch AG und AD lege man eine Ebne, und beschreibe darauf eine Parabel, deren Axe in der Lage AD, der Brennpunkt in E, und der Scheitel in A sei. Alsdann ist der Hauptparameter $4\,AE = 4\,AF$. Es zeiget diese Parabel ABC ohngefähr den Gang des Wasserstrals.

Denn es ist die Geschwindigkeit des ausgeworfenen Wassers so groß als die Geschwindigkeit eines längs FA herunterfallenden Körpers. Also hat, zufolge der Lehren der Dynamik, die Parabel $4\,AF$ zum Parameter für den Diameter, der durch A gehet, also hier für die Axe selbst, also

also ist AF = AE die Entfernung vom Scheitel bis zum Brennpunkte. Daß aber AD wirklich die Axe ist, und daß folglich der Scheitel und der Brennpunkt nirgends als in AD liegen können, erhellet daraus, daß die Tangente AG hier horizontal ist, welches nirgends als im Scheitel A Statt findet, indem solche Parabeln, die durch geworfene Körper beschrieben werden, allemal eine vertikale Axe haben. Daß die Parabel in der Ebne BAD liegen muß, ist leicht zu begreifen, indem die Richtung AG des Wurfes, und die Richtung AD der Fallkraft darin liegen.



II) Es gehe der Stral anfänglich aufwärts in einer Richtung, die schief gegen den Horizont sei. Das Gefäß sei

sei OPQAN, und die kleine Oefnung sei in A. Durch A ziehe man AR als die anfängliche Richtung des Wasserstrals senkrecht gegen die Fläche der Oefnung, man ziehe eine Vertikallinie AS. Durch beide lege man eine Ebne. Auf AS trage man die Wasserhöhe AF viermal, bis in L, so daß AL = 4 AF. Den zweiten Theilungs-Punkt M nehme man zum Mittelpunkte, und beschreibe durch L oder A einen Zirkel-Umkreis, in der gedachten Ebne. In derselbigen Ebne ziehe man die Horizontal-Linie AG. Aus K, wo die anfängliche Richtung vom Umkreise geschnitten wird, fälle man die lothrechte KB. Man halbire AK in I oder AB in T, und ziehe durch einen dieser Punkte die lothrechte Linie ID, so lieget die Axe der Parabel in dieser ID.

Man halbire IT in H, so ist H der Scheitel der Parabel.

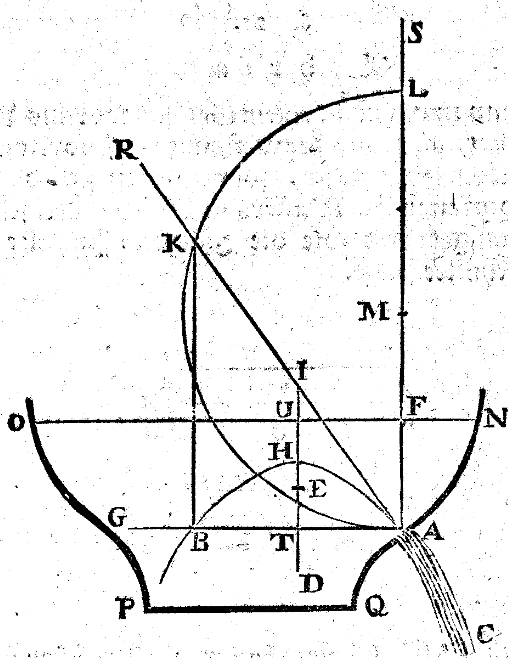
Man ziehe durch F eine horizontale Linie, bis sie die IT in U schneidet. Man mache HE = UH, so ist E der Brennpunkt der Parabel.

Da nun die Lage der Axe, des Scheitels und des Brennpunktes bekannt ist, so läßt sich die Parabel AHBC zeichnen. Diese ganze Konstrukzion haben wir in der Dynamik, im Hauptstücke von fallenden und geworfenen Körpern bewiesen.

III) Wenn der Wasserstral in einer Richtung, die gegen den Horizont schief ist, niederwärts gehet, so bleibet die Konstrukzion gänzlich, wie im vorigen Falle, nur daß die anfängliche Richtung rückwärts verlängert wird, und die Konstrukzions-Linien auf die Seite des Gefäßes fallen, wie in folgender Figur (Seite 29).

Anmerkung I. Aus den angeführten Konstrukzionen ließen sich Rechnungen herleiten, um die Dimensionen der Parabel in Buchstaben oder Zahlen zu bestimmen, wenn es die Mühe lohnete. Indessen, da die Konstrukzion des

ersten



ersten Falles sehr leicht ist, so kann man diesen Fall bei Versuchen annehmen, die Parabel auf einem Brette zeichnen, dieses neben der Oefnung befestigen, und dann versuchen, ob der Wasserstral die vorgeschriebene Bahn ziemlich beobachtet. Man wird finden, daß die Abweichung, wenigstens in der Nähe der Oefnung, fast unmerklich ist.

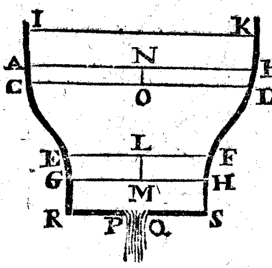
§. 20.

Bis jezt haben wir vorausgesetzet, daß das Gefäß immer gleich voll erhalten werde. Wir wollen nun den Fall betrachten, wo das abgehende Wasser nicht ersetzet wird, und das Gefäß sich also allmählig ausleeret. Jedoch wird die Oefnung noch immer klein angenommen.

§. 21.

Lehrsatz.

Wenn man sich in einem Gefäße, woraus Wasser spritzet, oberhalb der Oefnung zwei horizontale Durchschnitte vorstellet, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des Wassers in beiden Durchschnitten, umgekehret wie die Flächen-Inhalte der Durchschnitte selbst.



Es seien AB, EF zwei horizontale Durchschnitte im Gefäße IKSRI. Gesetzet, in einer sehr kurzen Zeit, die wir als Einheit betrachten wollen, senken sich alle in EF befindlichen Wassertheilchen bis GH, so werden sie immer durch andere ersetzet, und es läuft aus dem Gefäße eine Wassermenge, welche dem Prisma EFGH gleich ist, und dieses Prisma ist gleich EF $\times$ LM, wo EF die Grundfläche vorstellet. Die Höhe LM ist zugleich die Geschwindigkeit des Wassers an diesem Orte.

Da sich eine solche Wassermenge, wie das Prisma EFHG beträgt, von EF bis GH senket, so kann der Raum EFHG nicht leer bleiben, sondern es tritt von oben eine gleiche Wassermenge hinein. An der Stelle, welche diese verlassen hat, tritt eine andere gleiche Menge u. s. w., bis zur Höhe der AB, wo gleichfalls ein Wasserprisma ABDC, welches

welches dem EFHG gleich ist, seine Stelle verläßt, und durch ein gleiches Prisma ersetzet wird. Dieses Prisma beträgt AB × NO, wo AB die Grundfläche ist, NO aber die Höhe und zugleich die Geschwindigkeit an diesem Orte.

Da nun beide Prismen gleich sind, so ist

$$EF \times LM = AB \times NO.$$

daher $LM : NO :: AB : EF$ oder die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Durchschnitts-Flächen.

Wenn auch die Schichten EFHG, ABDC keine eigentliche Prismen, sondern vielmehr abgekürzte Pyramiden bilden, so hindert nicht, sie doch als Prismen zu betrachten, weil sie eine sehr kleine, oder eigentlich eine unendlich kleine Höhe haben.

Zusatz I. Auch von der Oefnung PQ und einem beliebigen Durchschnitte EF gilt das Verhältniß, daß die Geschwindigkeiten in der Oefnung und im Durchschnitte, sich umgekehrt verhalten, wie die Flächen-Inhalte der Oefnung und des Durchschnittes. Denn es kann die Oefnung als ein Durchschnitt des Gefäßes betrachtet werden, welches an diesem Orte sehr verengert ist.

Zusatz II. Da sich der Wasserstral außerhalb der Oefnung verengert, und dann wieder erweitert, so könnte man sich eine Fortsetzung des Gefäßes, welche sich bis zum engsten Durchschnitte, genau an den Stral anschlösse, vorstellen. Also verhielt sich die Geschwindigkeit im engsten Durchschnitte zur Geschwindigkeit in der Oefnung, wie die Fläche der Oefnung zur Fläche des engsten Durchschnittes, das ist, wie 3 zu 2 ohngefähr (§. 5). Allein dieser Schluß würde übereilt sein. Das Wasser gehet durch den engsten Durchschnitt nicht viel geschwinder, als durch die Oefnung selbst. Denn in der Oefnung hat der eigentliche Wasserstral, der die der Wasserhöhe entsprechende Geschwindigkeit besitzet, ohngefähr nur die Breite

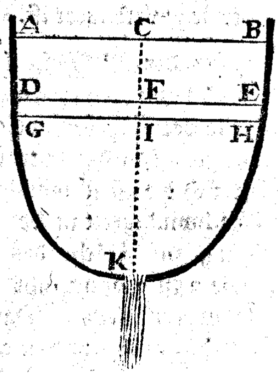
des

des engsten Durchschnittes; er ist aber mit einem Wasserringe umgeben, der an dem Rande der Oefnung klebet (§. 5), und wenig Geschwindigkeit hat. Da hier genaue Bestimmungen unmöglich sind, so kann man sich an der schon gegebenen Regel (§. 9, Zus. III) halten, daß die Geschwindigkeiten sowohl in der Oefnung, als in dem engsten Durchschnitte den respektiven Wasserhöhen entsprechen, so daß die Geschwindigkeit im engsten Durchschnitte in der That etwas aber nur wenig, größer ist, als in der Oefnung, weil der engste Durchschnitt tiefer unter dem Wasserspiegel lieget.

§. 22.

Aufgabe.

Aus einem Gefäße von beliebiger Gestalt fließt Wasser durch eine kleine Oefnung, ohne daß es ersetzet werde. Es wird gefraget, in wie viel Zeit die Oberfläche des Wassers sich bis zu einer gewissen Tiefe senket, oder auch das Gefäß sich ganz ausleeret.



Es sei die Oefnung bei K. . . . . . . $= f$
Die anfängliche Wasserhöhe KC. . . . . $= h$

Die

Die nach einer gewissen Zeit noch bleibende Höhe KF $= x$
Der Flächen-Inhalt des Durchschnittes DE $= u$
Die Zeit, in welcher das Wasser von AB bis DE sinket $= z$

Man stelle sich vor, es sei schon die Zeit z verflossen, während welcher die Oberfläche des Wassers von AB bis DE gesunken ist. Man betrachte nun, was in der nächst folgenden unendlich-kleinen Zeit dz geschiehet. Das Wasser sinket noch um FI $= dx$. Es fließt also in dieser Zeit von DE bis GH ein Wasserprisma DE $\times$ FI $= udx$. Als ein Prisma kann dieses Stück, wegen der unendlich-kleinen Dicke oder Höhe, betrachtet werden. Eben so viel Wasser muß in der nämlichen Zeit dz durch die Oefnung K gehen. Die Geschwindigkeit in der Oefnung ist $\sqrt{2p\,\text{KF}} = \sqrt{2px}$ (§. 10), also fließt durch dieselbe in einer Sekunde die Menge $f\sqrt{2px}$, und in der Zeit dz, $dzf2px$, oder eigentlich, wenn wir durch α einen Faktoren verstehen, den die Erfahrung angeben muß, um die Wassermenge zu korrigiren (§. 13, Zus. III), $\alpha dzf\sqrt{2px}$. Diese Menge muß jener udx gleich sein. Ferner, da x abnimmt, während daß z zunimmt, so muß dx negativ genommen werden, wenn dz positiv ist. Also ist

$$\alpha dzf\sqrt{2px} = -udx$$

$$dz = -\frac{udx}{\alpha f\sqrt{2px}}$$

$$dz = -\frac{1}{\alpha f\sqrt{2p}} \cdot \frac{udx}{\sqrt{x}}$$

$$dz = -\frac{1}{\alpha f\sqrt{2p}} \cdot ux^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$z = C - \frac{1}{\alpha f\sqrt{2p}} \cdot \int ux^{-\frac{1}{2}}dx$$

 wo

wo C eine beständige Größe andeutet. In den Fällen nun wo sich u in einer Funkzion von x ausdrücken läßt, und wo diese Funkzion, nachdem sie mit $dx^{-\frac{1}{2}}z$ multipliziret worden, integrabel ist, wird man die Aufgabe allemal auflösen können.

Zusatz I. Es sei das Gefäß prismatisch oder zylindrisch, und die Basis oder jeder Durchschnitt betrage am Flächen-Inhalte b, so setzet man die beständige Größe b anstatt der veränderlichen u in die Formel. Dann ist

$$z = C - \frac{1}{\alpha f \sqrt{2p}} \int b\, x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= C - \frac{b}{\alpha f \sqrt{2p}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= C - \frac{b}{\alpha f \sqrt{2p}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$= C - \frac{b}{\alpha f \sqrt{2p}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})}$$

$$= C - \frac{b}{\alpha f . \frac{1}{2} \sqrt{2p}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$= C - \frac{b}{\alpha f \sqrt{\frac{1}{2}p}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$= C - \frac{b\sqrt{x}}{\alpha f \sqrt{\frac{1}{2}p}}$$

$$= C - \frac{b}{\alpha f} \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{2}p}}$$

$$z = C - \frac{b}{\alpha f} \sqrt{\frac{2x}{p}}$$

Um nun C zu finden, bedenke man, daß die Zeit z null wird, wenn x noch der ganzen Höhe h gleich ist, also

o =

$$o = C - \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{2h}{p}}$$

$$\text{daher } C = \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{2h}{p}}.$$

$$\text{und } z = \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{2h}{p}} - \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{2x}{p}}$$

$$\text{oder } z = \frac{b}{\alpha f}\left(\sqrt{\frac{2h}{p}} - \sqrt{\frac{2x}{p}}\right)$$

Soll das ganze Gefäß leer werden, so wird alsdann $x = o$, und man hat nur noch

$$z = \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{2h}{p}}$$

Die Längenmaaße werden in Fußen, und die Zeit in Sekunden gerechnet.

Exempel. Es sei das Gefäß zylindrisch von 1 Fuß im Durchmesser, die Oefnung rund ohne Mundstück, und von 1 Zoll im Durchmesser, die anfängliche Höhe $h = 3$ Fuß, die übrig bleibende $x = 2$ Fuß, so daß das Wasser um 1 Fuß falle; es wird gefraget, in wie viel Zeit dieses geschiehet.

Hier ist b ein Zirkel, der 1 zum Durchmesser hat, also ist sein Flächen-Inhalt $\frac{1}{4}\pi$, wenn sich überhaupt jeder Durchmesser zur Peripherie verhält, wie 1 zu π. Hier ist auch f ein Zirkel, der $\frac{1}{12}$ Fuß zum Durchmesser hat, also ist sein Flächen-Inhalt $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^2 \pi$. Folglich ist

$$\frac{b}{f} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^2\pi}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{12}\right)^2}$$

$$= 12^2$$

$$= 144$$

Ferner

Ferner ist der Erfahrung nach (§. 13, Zus. V)

$$\alpha = \tfrac{10000}{16157}$$

$$\text{also } \frac{1}{\alpha} = \tfrac{16157}{10000} = 1{,}6157$$

Die Größe p beträgt (§. 10) 31,253

Folglich bekommen wir im gegenwärtigen Falle

$$z = (1{,}6157)\ 144.\ \left(\sqrt{\tfrac{6}{31{,}253}} - \sqrt{\tfrac{4}{31{,}253}}\right)$$

$$\begin{array}{rcl}
\log.\ 6 & = & 0{,}7781513 \\
\log.\ 31{,}253 & = & 1{,}4948917 \\
\hline
 & & 9{,}2832596 \\
 & 2) & 9{,}6416298 \\
\text{Zahl} & = & 0{,}43815
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\log.\ 4 & = & 0{,}6020600 \\
\log.\ 31{,}253 & = & 1{,}4948917 \\
\hline
 & & 9{,}1071683 \\
 & 2) & 9{,}5535841 \\
\text{Zahl} & & 0{,}35775 \\
\text{von} & & 0{,}43815 \\
\hline
\text{bleibt} & & 0{,}08040
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\log.\ 0{,}08040 & = & 8{,}9052560 \\
\log.\ 144 & = & 2{,}1583625 \\
\log.\ 1{,}6157 & = & 0{,}2083607 \\
\hline
 & & 1{,}2718792 \\
z & = & 18\tfrac{7}{10}\ \text{ohngefähr.}
\end{array}$$

Also

Also in $18\frac{7}{10}$ Sekunden wird das Wasser in gedachtem Gefäße um 1 Fuß fallen.

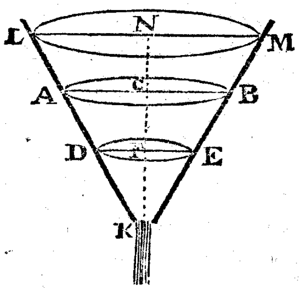
Will man wissen, in wie viel Zeit das ganze Gefäß sich ausleeren wird, so fällt $\sqrt{\frac{4}{31,253}}$ weg, und man bekömmt die folgende Rechnung.

$$\begin{array}{rcl} 9,6416298 & = \log. & \sqrt{\frac{6}{31,253}} \\ 2,1583625 & = \log. & 144 \\ \underline{0,2083607} & = \log. & 1,6157 \\ 2,0083530 & & \end{array}$$

Zahl 101,94

also in beinahe 102 Sekunden, oder beinahe $1\frac{3}{4}$ Minuten wird das Gefäß leer sein.

Zusatz II. Es sei das Gefäß LKM in Gestalt eines



umgekehrten Kegels gemacht, und es verhalte sich die Höhe KN zur obersten Breite LM, wie m zu n. Die anfängliche Wasserhöhe sei KE, und es werde verlanget die Zeit, während welcher das Wasser bis in DE sinket.

Hier ist

$$KF : FE :: KC : CB :: KN : NM$$

und auch $KF : 2FE :: KC : 2CB :: KN : 2MN$

 oder

oder KF : DE :: KC : AB :: KN : LM :: $m:n$

also x : DE :: m : n

daher $$\mathrm{DE} = \frac{n}{m} x$$

Nun ist DE $\left(= \frac{n}{m} x\right)$ der Durchmesser eines zirkelrunden Durchschnitts des Kegels, folglich beträgt dieser Durchschnitt am Flächen-Inhalte

$$\tfrac{1}{4}\pi . \frac{n^2}{m^2} x^2$$

$$\text{oder } u = \frac{n^2\pi}{4m^2} x^2$$

Es sei ferner die kleine Oefnung unten an der Spitze des Kegels ebenfalls ein Zirkel, der d zum Durchmesser hat, so ist $f = \frac{1}{4}\pi d^2$. Diese Werthe von u und f setze man in die allgemeine Formel (Seite 33), so ist

$$z = C - \frac{1}{\alpha.(\frac{1}{4}\pi d^2)\sqrt{2p}} . \int \frac{n^2\pi}{4m^2} x^2 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$z = C - \frac{4}{\alpha\pi d^2 \sqrt{2p}} . \frac{n^2\pi}{4m^2} \int x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$z = C - \frac{n^2}{\alpha d^2 m^2 \sqrt{2p}} . \int x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$z = C - \frac{n^2}{\alpha d^2 m^2 \sqrt{2p}} . \tfrac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$$

$$z = C - \frac{2n^2}{5\alpha d^2 m^2 \sqrt{2p}} x^2 \sqrt{x}$$

oder

oder da $\frac{2}{\sqrt{2p}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}p}}$, und da $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{2}p}}$

$$= \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{2}p}} = \sqrt{\frac{2x}{p}},$$

$$z = C - \frac{n^2}{5\alpha d^2 m^2} x^2 \sqrt{\frac{2x}{p}}$$

und da zugleich $z = 0$ und $x = KC = h$, so ist

$$0 = C - \frac{n^2}{5\alpha d^2 m^2} h^2 \sqrt{\frac{2h}{p}}$$

$$\text{also } C = \frac{n^2}{5\alpha d^2 m^2} h^2 \sqrt{\frac{2h}{p}}$$

$$\text{folglich } z = \frac{n^2}{5\alpha d^2 m^2} \left(h^2 \sqrt{\frac{2h}{p}} - x^2 \sqrt{\frac{2x}{p}} \right)$$

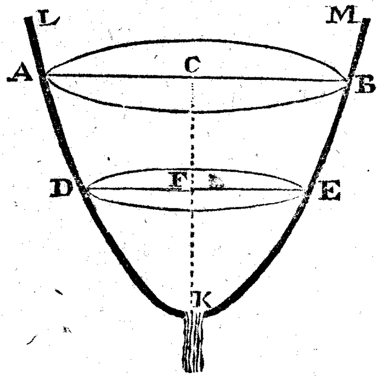
Wenn das Wasser ganz ablaufen soll, und folglich $x = 0$ wird, so ist

$$z = \frac{n^2 h^2}{5\alpha d^2 m^2} \sqrt{\frac{2h}{p}}$$

Den kleinen Unterschied zwischen der Stelle, wo die kleine Oefnung ist, und der wahren Spitze des Kegels, haben wir aus der Acht gelassen, weil der daraus entstehende Unterschied der Zeit ganz unmerklich ist.

Zusatz III. Es sei das Gefäß LKM (folg. Fig.) ein parabolischer Trichter, der da entstehet, wenn sich eine gemeine Parabel um ihre Axe drehet, der Parameter der Parabel sei q, und die kleine Oefnung K sei am Scheitel der Parabel, so ist $FE^2 = q \cdot KF = qx$, $DE^2 = 4qx$. Nun ist der Durchschnitt bei $F = \frac{1}{4}\pi DE^2$, also ist $u = \frac{1}{4}\pi \cdot 4qx = \pi qx$. Es sei die Oefnung bei K rund, und ihr Durchmesser $= d$,

 so



so ist $f = \frac{1}{4}\pi d^2$, setzet man diese Werthe von u und f in die allgemeine Formel (Seite 33), so hat man

$$z = C - \frac{1}{\alpha.\frac{1}{4}\pi d^2.\sqrt{2p}} \int \pi q x.\ x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$z = C - \frac{4q}{\alpha d^2 \sqrt{2p}} \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$z = C - \frac{4q}{\alpha d^2 \sqrt{2p}}.\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$z = C - \frac{8q.\ x\sqrt{x}}{3\alpha d^2 \sqrt{2p}}$$

Nun ist $\frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{2p}} = \frac{4\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{2p}} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{2}p}}$

$$= 4\sqrt{\frac{x}{\frac{1}{2}p}} = 4\sqrt{\frac{2x}{p}}$$

also

also $z = C - \frac{4q}{3\alpha d^2} x \sqrt{\frac{2x}{p}}$

Nun wird zugleich $z = 0$ und $x = h$, also

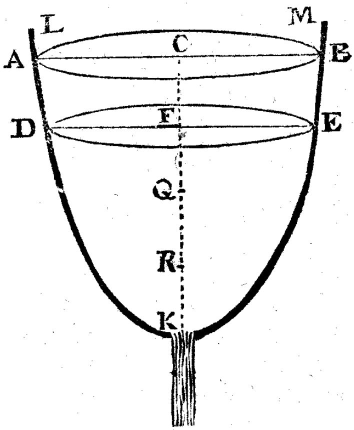
$$C = \frac{4q}{3\alpha d^2} h \sqrt{\frac{2h}{p}}$$

$$z = \frac{4q}{3\alpha d^2} \left(h\sqrt{\frac{2h}{p}} - x\sqrt{\frac{2x}{p}} \right)$$

Wenn das Wasser ganz ausläuft, so wird $x = 0$, und

$$z = \frac{4q}{3\alpha d^2} h\sqrt{\frac{2h}{p}}$$

Zusatz IV. Es sei das Gefäß LKM wiederum eine Art eines parabolischen Trichters, der aus der Umdrehung



der krummen Linie KEBM um ihre Axe KC entstanden sei. Es sei aber diese krumme Linie keine gemeine Parabel,

 sondern

sondern eine solche, worin die Quadrate der Ordinaten sich verhalten, wie dir Quadratwurzeln der Abzissen. Also, wenn y die Ordinaten, x die Abzissen, und a irgend einen beständigen Parameter bedeutet, so ist $y^2 = a\sqrt{x}$ oder $y^2 = ax^{\frac{1}{2}}$. Die Durchschnittsfläche bei F wird $\frac{1}{4}\pi.\,DE^2 = \frac{1}{4}\pi.(2y)^2 = \pi y^2 = \pi a x^{\frac{1}{2}} = u$. Setzet man diesen Werth von u in die allgemeine Formel (Seite 33), so ist

$$z = C - \frac{1}{\alpha f\sqrt{2p}} \int \pi a x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

Ist dabei die Oefnung zirkelrund, und ihr Durchmesser $= d$, so ist $f = \frac{1}{4}\pi d^2$, und dann wird

$$z = C - \frac{\pi a}{\alpha.\frac{1}{4}\pi d^2.\sqrt{2p}} \int dx$$

$$z = C - \frac{4a}{\alpha d^2\sqrt{2p}}\, x$$

Wenn man C wie in den vorigen Zusätzen bestimmet, so hat man

$$z = \frac{4a}{\alpha d^2\sqrt{2p}}\,(h - x)$$

Da $\frac{4a}{\alpha d^2\sqrt{2p}}$ eine beständige Größe ist, so verhalten sich die Zeiten z, wie die Räume $(h - x)$, das ist, wie die vom Anfange der Bewegungen durchlaufenen vertikalen Räumen CF, CQ, CR, &c. Nimmt man demnach CQ = 2 CF, CR = 3 CF &c., und nennet man t die Zeit, in welcher das Wasser von C bis F gefallen ist, so wird es in der Zeit $2t$ von C bis Q, in $3t$ von C bis R, u. s. f. gefallen sein. Also, wenn man die ganze Höhe in gleiche Theile theilet, so werden die Theile in gleichen Zeiten zurückgeleget.

§. 23.

§. 23.

Aufgabe.

Eine Wasseruhr einrichten.

Man kann dazu ein solches Gefäß gebrauchen, wie im vorigen Paragraph Zus. IV beschrieben worden, und die Höhe in gleiche Theile eintheilen, so wird der Wasserspiegel, so wie er nach und nach den Eintheilungen gegenüber zu stehen kömmt, gleiche Theile der Zeit anzeigen.

Sollen diese gleiche Theile Minuten sein, so erinnere man sich, daß unsere Formeln alle für Sekunden und Fuße eingerichtet sind. Setzet man demnach 60 Sekunden anstatt z in die Gleichung

$$z = \frac{4a}{\alpha d^2 \sqrt{2p}}(h - x)$$

nachdem a, d, p, in Fußen bestimmet worden, so läßt sich $(h - x)$ oder das Fallen des Wassers für die ersten 60 Sekunden, also auch für die folgenden in Fußen finden.

Anstatt eines solchen Gefäßes kann auch ein zylindrisches oder prismatisches gebrauchet werden. Nämlich für ein solches Gefäß wurde gefunden (§. 22, Zus. 1), wenn es sich von einer gewissen Höhe h an ausleeren soll

$$z = \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{2h}{p}}$$

$$\text{oder } z = \frac{b}{\alpha f}\sqrt{\frac{h}{\frac{1}{2}p}}$$

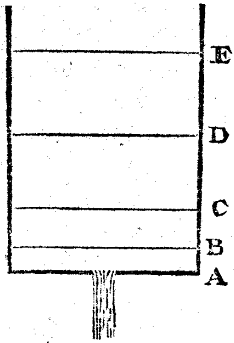
$$\text{oder } z = \frac{b}{\alpha f \sqrt{\frac{1}{2}p}}\sqrt{h}$$

$$\text{oder } z = \frac{4b}{\alpha f \sqrt{2p}}\sqrt{h}$$

oder

oder wenn wir setzen $\frac{4b}{\alpha f \sqrt{2p}} = \mu$,

$$z = \mu \sqrt{h}$$



Man theile nun ein zylindrisches Gefäß von unten nach oben, nach Verhältniß der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w., so daß z. E. AB = 1, BC = 3, CD = 5, DE = 7, u. s. w., so ist AB = 1, AC = 4, AD = 9, AE = 16, u. s. w., und diese Höhen sind lauter Quadrat-Zahlen, deren Wurzeln 1, 2, 3, 4, u. s. w. sind. Die Formel $z = \mu \sqrt{h}$, giebt also nach und nach für die Höhen EA, DA, CA, BA,

$$z = 4\mu$$
$$z = 3\mu$$
$$z = 2\mu$$
$$z = 1\mu$$

Folglich fällt das Wasser von E bis D in einer Zeit $= 4\mu - 3\mu = 1\mu$; von D bis C in der Zeit $3\mu - 2\mu = 1\mu$; von B bis A in der Zeit $1\mu - 0.\mu = 1\mu$. Also werden die

die Räume ED, DC, CB, BA in gleichen Zeiten vom Wasserspiegel durchlaufen.

Sollen die gleichen Zeittheile Minuten sein, so braucht man nur den untersten Raum BA für 1 Minute zu bestimmen. Da

$$z = \mu \sqrt{h}$$

und da $z = 60$ Sekunden sein soll, so wird

$$60 = \mu \sqrt{h}$$

$$3600 = \mu^2 . h$$

$$\frac{3600}{\mu^2} = h$$

Da $\mu = \frac{4b}{\alpha f \sqrt{2p}}$, so muß nicht nur die Beschleunigung p für fallende Körper bekannt sein, sondern auch der Flächen-Inhalt sowohl der ganzen Basis b des Zylinders, als der Oefnung f, sammt der Zahl α, welche den Ausfluß der Erfahrung gemäß verbessert (§. 13, Zus. V).

Anmerkung. Man erinnere sich wohl, daß diese Theorie der Wasseruhren, und überhaupt die Theorie der Zeit des Abfließens bei einer veränderlichen Wasserhöhe, nur für kleinen Oefnungen eingerichtet ist. Wenn sie also mit der Erfahrung übereinstimmen soll, so muß die Oefnung in der That, in Vergleich mit den horizontalen Durchschnitten des Gefäßes, sehr klein, oder diese Durchschnitte sehr groß sein. Wenn die Einrichtung so gemacht ist, daß die Ausleerung des Gefäßes in wenigen Minuten geschiehet, so ist kaum einige Uebereinstimmung der Erfahrung mit der Theorie zu erwarten, indem alsdann entweder das Gefäß zu klein, oder die Oefnung zu groß ist. In der That findet man in Mariottes Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik dergleichen Versuche, welche von der Theorie sehr abweichen.

Zweites

Zweites Hauptstück.

Von Springwerken.

§. 1.

Eine jede Einrichtung, vermittelst welcher das aus einem Gefäße strömende Wasser, einen vertikalen aufwärts gerichteten Stral bildet, wird ein **Springwerk** oder ein **Springbrunnen** genannt. Besonders gebraucht man diese Benennungen, wenn die Einrichtung im Großen entweder zum Nutzen oder zum Vergnügen, getroffen ist. Die wesentlichsten Dingen, welche man bei einem Springwerke zu betrachten hat, sind folgende.

1) Der entweder vorhandene oder zu erhaltende **Wasserstral**, welcher der Zweck der ganzen Einrichtung ist. Man hat hauptsächlich auf seine Höhe und Dicke zu merken.

2) Die **Oefnung**, aus welcher der Stral herauskömmt, ihr Flächen-Inhalt, und ihr Durchmesser, wenn sie, wie gewöhnlich, zirkelrund ist.

3) Die **Leitröhre**, welche das Wasser bis an den Ort führet, wo es springen soll. Sie pfleget mit einer anderen gerade aufwärts steigenden Röhre, die unmittelbar mit dem Behälter Gemeinschaft hat, verbunden zu sein; diese lothrechte Röhre wird die **Fallröhre** genannt.

4) Der **Wasserbehälter**. Diesen kann man unmittelbar mit Wasser versehen, oder es wird noch nebenbei ein viel größerer Zuflußbehälter angebracht; aus diesem wird

wird das Wasser in jenen gelassen, und nöthigenfalls vermittelst eines Schutzbrettes zurückgehalten.

5) Die Mittel, wodurch das Wasser herbeigeschaft wird.

Diese fünf Dinge wollen wir nun kürzlich betrachten.

§. 2.

Die Höhe und Dicke des Wasserstrals muß vor allen Dingen bestimmet werden, wenn man ein Springwerk anlegen will. Man muß also diese beiden Größen als gegeben betrachten. Die Dicke des Strals ist nicht allenthalben gleich, wie schon oben (Hauptstück I, §. 5) bemerket worden. Er verengert sich, von der Oefnung an bis zu einer Entfernung, die ohngefähr den halben Durchmesser der Oefnung beträgt, und breitet sich hernach wieder allmählig aus, ganz oben zerstreuet sich das Wasser, wie bekannt ist, und fällt auf allen Seiten, wie ein Regen herunter. Man kann also, wenn man will, den kleinsten Durchschnitt des verlangten Strals bestimmen; oder man kann auch die Oefnung selbst gleich anfänglich bestimmen, und sie als einen mittleren Durchmesser des Wasserstrals betrachten.

§. 3.

Die Oefnung pfleget rund gemacht zu werden, und muß ohne Aufsatzstück sein. Denn durch eine solche angesetzte kleine Röhre fließt mehr Wasser, und es fließt mit weniger Geschwindigkeit, als durch eine bloße Oefnung (Hauptst. I, §. 7). Mehr Wasser aber erfordert einen größeren Zufluß, welchen man nicht allemal nach Belieben erhalten kann; und eine geringere Geschwindigkeit des springenden Wassers, machet daß es nicht so hoch springet, welches dem gewöhnlichen Zwecke der Springwerke zuwider ist. Das beste ist, wenn man die Oefnung

in

in einer metallenen Platte machet, welche das Ende der Leitröhre verschließt oder bedecket.

Wenn der engste Durchschnitt des Wasserstrals gegeben ist, so findet man die Oefnung, indem man saget, jener Durchschnitt verhält sich zu dieser Oefnung, wie 2 zu 3 (Hauptst. I, §. 6), oder der Durchmesser des engsten Durchschnittes verhält sich zum Durchmesser der Oefnung wie $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$, wenn die Oefnung zirkelrund ist.

§. 4.

Die Leitröhre kann auch rund gemachet werden. Sie muß keine scharfe Ecken haben, sondern sich, so viel als thunlich ist, allmälig krümmen; denn das durch die Röhre fließende Wasser stößt sich an die Wände derselben, wenn es mit einmal seine Richtung verändern soll, und verlieret dadurch einen Theil seiner Geschwindigkeit. Wir werden zwar sehen, daß eine allzugroße Geschwindigkeit in der Röhre nicht vortheilhaft ist; die gehörige mittelmäßige Geschwindigkeit kann aber durch die Verhältnisse der Theile weit besser erhalten werden, als durch die unnatürliche eckigte Gestalt der Linie, welche die Röhre bildet; zumal da auch der Stoß des Wassers an solche Ecken die Röhre sprengen kann.

Auch muß die Röhre keine Verengerungen haben; denn dadurch wird der freie Lauf des Wassers und folglich seine Geschwindigkeit bis zur Oefnung ebenfalls gehindert.

Ueberhaupt muß die Leitröhre, aus demselbigen Grunde, und aus anderen bald zu berührenden Ursachen, nicht zu enge sein. Man läuft keine Gefahr, wenn man sie lieber zu weit als zu enge machet; denn sie soll mit der Fallröhre und den Behälter zusammen ein einziges Gefäß vorstellen, welches nur eine kleine Oefnung hat.

§. 5.

§. 5.

Die Größe des Behälters ist ziemlich willkührlich; nur muß er geräumig genug sein, um daß das Wasser darin ohngefähr einerlei Höhe behalte, wenn es auch nicht in eins fort ersetzet werden kann. Der Behälter muß so hoch stehen, daß die Wasserhöhe von der Oefnung an, bis zur verlängerten Oberfläche des Wassers etwas mehr betrage, als die verlängerte Höhe des Wasserstrals. Die nähere Bestimmung soll weiter unten gegeben werden. Der Zuflußbehälter, welcher oben (§. 1) erwähnet worden, dienet dazu, daß der Wasserspiegel im anderen Behälter eine beinahe unveränderliche Höhe habe.

§. 6.

Die Mittel, um das abfließende Wasser zu ersetzen, sind sehr verschieden. Das unbequemste von allem ist wohl das bloße Zugießen durch Menschenhände, welches aber nur bei kleinen Versuchen Statt findet. Besser gehet es von Statten, wenn man Druckwerke, archimedische Schrauben, und dergleichen Werkzeuge gebrauchet, die durch Menschen oder Thiere beweget werden, und das Wasser aus einem nahen Gewässer herauf bringen. Noch bequemer ist es, wenn man ein fließendes Wasser in der Nähe hat, und die Druckwerke oder Wasserschrauben, vermittelst Wasserräder, von fließendem Wasser selbst treiben läßt, oder wenn man eine Dampfmaschine gebrauchet, an welcher das Druckwerk durch Feuer und Dampf beweget wird. Von allen diesen Mitteln, wodurch das Wasser in die Höhe getrieben werden kann, ist schon im zweiten Hauptstücke der Hydrostatik gehandelt worden.

§. 7.

Aufgabe.

Es ist gegeben die Wasserhöhe, und der Durchmesser der Leitröhre, es soll der vortheilhafteste Durchmesser der Oefnung gefunden werden.

Bei dieser und ähnlichen Aufgaben muß die Theorie mit der Erfahrung verbunden werden.

Die Erfahrung lehret, daß bei einer Wasserhöhe von 16 Fuß, und einer Leitröhre, die $28\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser hat, der Wasserstral am höchsten steiget, wenn die Oefnung 6 Linien beträgt.

Es seien nun zwei Springbrunnen, beide aufs vortheilhafteste eingerichtet. Bei dem einen sei die Wasserhöhe $= h$, der Durchmesser der Leitröhre $=$ D, und der Durchmesser der Oefnung $= d$. Bei dem andern sei die Wasserhöhe $= h'$, der Durchmesser der Leitröhre $= D'$, und der Durchmesser der Oefnung $= d'$.

Da nun bei dem ersten Springbrunnen D der Durchmesser eines Durchschnittes der Leitröhre, und d der Durchmesser der Oefnung ist, so beträgt der Durchschnitt der Leitröhre $\frac{1}{4}\pi D^2$ und die Oefnung $\frac{1}{4}\pi d^2$, wo π das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bedeutet.

Die Geschwindigkeiten des Wassers verhalten sich umgekehrt, wie die Durchschnitte, durch welche es läuft (Hauptst. I, §. 21, Zus. I).

Es sei demnach die Geschwindigkeit des Wassers in der Oefnung V; und in der Röhre, v; so ist

$$V : v :: \tfrac{1}{4}\pi D^2 : \tfrac{1}{4}\pi d^2$$

oder $$V : v :: D^2 : d^2$$

daher $$v = \frac{V.\ d^2}{D^2}$$

Bei

Bei dem andern Springbrunnen ist ebenfalls V' die Geschwindigkeit des Wassers in der Oefnung, und v' dessen Geschwindigkeit in der Röhre; also findet man auf dieselbige Art

$$v' = \frac{V' d'^2}{D'^2}$$

Was eigentlich das Herausspritzen des Wassers verursachet, ist der Druck desjenigen Wassers, welches im Behälter und in den Röhren höher stehet, als die Oefnung. Dieser Druck würket nur in so fern das drückende Wasser sich langsam beweget; denn wenn es sich geschwinde beweget, so wirket es nur wenig auf die herausfahrende Wassersäule (Hauptst. I, §. 9, Zus. V).

Indessen, bewegen muß es sich doch mit einer gewissen Geschwindigkeit, um das herausgehende Wasser zu ersetzen.

Es wird demnach einen gewissen Grad der Geschwindigkeit des Wassers in den Leitungs-Röhren geben, der weder zu groß noch zu klein ist, und am vortheilhaftesten ist, um dem Wasserstral am höchsten hinauf zu treiben.

Diese vortheilhafteste Geschwindigkeit in den Leitungsröhren sei allemal a, so ist bei den obengedachten Springbrunnen

$$a = v = \frac{V d^2}{D^2}$$

$$a = v' = \frac{v' d'^2}{D'^2}$$

$$\text{folglich } \frac{V d^2}{D^2} = \frac{V' d'^2}{D^2}$$

Nun ist (Hauptst. I, §. 10), wenn p diejenige Geschwindigkeit bedeutet, welche jeder Körper hat, nachdem er im leeren Raume während einer Zeit-Sekunde gefallen ist,

$$V = \sqrt{(2ph)} = \sqrt{2p}\ \sqrt{h}$$
$$V' = \sqrt{(2ph')} = \sqrt{2p}\ \sqrt{h'}$$

also $$\frac{d^2 \sqrt{h}.\ \sqrt{2p}}{D^2} = \frac{d'^2 \sqrt{h'}.\ \sqrt{2p}}{D'^2}$$

oder $$\frac{d^2 \sqrt{h}}{D^2} = \frac{d'^2 \sqrt{h'}}{D'^2}$$

Es sei derjenige Springbrunnen, worauf sich die Größen d', h', D' beziehen, so beschaffen, wie kurz vorher als sehr vortheilhaft angegeben worden, nämlich $d' =$ 6 Linien, $h' = 16$ Fuß, $D' = 28\frac{1}{2}$ Linien, oder, alles in Zollen gerechnet, $d' = \frac{1}{2}$ Zoll, $h' = 192$ Zoll, $D' = \frac{57}{24}$ Zoll, daher

$$\frac{d'^2 \sqrt{h'^2}}{D'^2} = \frac{(\frac{1}{2})^2 . \sqrt{(192)}}{(\frac{57}{24})^2}$$
$$\frac{24^2 \sqrt{(192)}}{2^2 . 57^2}$$
$$= \frac{12^2 \sqrt{(192)}}{57^2}$$

$2 \log.\ 12 = 2{,}1583624$
$\frac{1}{2} \log.\ 192 = 1{,}1416506$
$3{,}3000130$
$2 \log.\ 57 = 3{,}5117498$
$9{,}7882632$!
oder $1{,}7882631$
Zahl $0{,}61413$

Also ist

$$\frac{d^2 \sqrt{h}}{D^2} = 0{,}61413$$

$$d^2 = \frac{(0{,}61413)\, D^2}{\sqrt{h}}$$

oder

oder, welches noch bequemer sein wird,

$$d = \frac{\sqrt{(0{,}61413)}.\,D}{\sqrt[4]{h}}$$

das ist $d = \frac{(0{,}78367)\,D}{\sqrt[4]{h}}$

man merke, daß log. 0,78367 = 9,8941316!

Die Durchmesser werden hier in Zollen gerechnet. Es sei z. E. die Höhe des Behälters 32 Fuß, und der Durchmesser der Leitungsröhre 3 Zoll 4 Linien, so haben wir

$$D = 3\tfrac{1}{3} = \tfrac{10}{3} \text{ Zoll}$$

$$h = 32 \times 12 = 384 \text{ Zoll}$$

$$d = \frac{(0{,}78367)\,\frac{10}{3}}{\sqrt[4]{384}}$$

$$d = \frac{7{,}8367}{3\sqrt[4]{384}}$$

log. 7,8367 . . . . = 0,894 13 16

log. 3 . . . . . = 0,4771213

$\frac{1}{4}$ log. 384. . . = 0,6460828

. . . . . 1,123.20.41

9,770 92 75 !

Da dieser Logarithmus keine ganze Zolle giebt, so addire man noch den Logarithmus von 12, um Linien zu bekommen.

9,7709275 !

log. 12 = 1,0791812

0,8501087

Zahl 7,0812 Zoll, oder beinahe 7 $\frac{1}{10}$ Zoll

So groß wird demnach der Durchmesser der Oefnung gemacht werden müssen, um daß der Wasserstral so hoch als möglich springe.

Anmerkung. Wenn man bedenket, daß das Wasser am Rande der Oefnung einen Ring bildet (Hauptst. I, §. 5), daß nur das Wasser innerhalb dieses Ringes die gehörige Geschwindigkeit hat, und daß dieses inwendige Wasser nicht viel mehr Durchmesser hat, als der engste Durchschnitt des Wasserstrals, so könnte dieses einigen Zweifel erregen. Indessen machet es keine Veränderung in dem Resultate der Rechnung. Denn wenn man auch die Oefnung auf $\frac{2}{3}$ ihrer selbst reduziret, so hat man (Seite 50)

$$V : v :: \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4}\pi D^2) : \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4}\pi d^2)$$

welches ebenfalls giebt

$$V : v :: D^2 : d^2$$

so daß die Folge des Beweises unverändert bleibet.

Zusatz. Aus

$$d = \frac{(0{,}78367)\ D}{\sqrt[4]{h}}$$

folget $D = \frac{d.\sqrt[4]{h}}{0{,}78367}$

Wenn also die Höhe des Behälters und der Durchmesser der Oefnung bestimmet sind, so läßt sich der Durchmesser der Leitungsröhre darnach einrichten. Man erinnere sich hierbei, daß man den Durchmesser der Röhre lieber zu groß, als zu klein annehmen muß (§. 4).

§. 8.

Aufgabe.

Wenn ein Springbrunnen am vortheilhaftesten eingerichtet ist, so soll die Höhe bestimmet werden, welche der Wasserstral erreichen wird.

Die

Die Erfahrung lehret, daß bei der vortheilhaftesten Einrichtung ein Wasserstral von 30 Fuß einen Behälter erfordert, in welchem die Oberfläche des Wassers 33 Fuß über der Oefnung erhoben sei.

Die Erfahrung lehret ferner, daß die Unterschiede zwischen den Höhen des Behälters und des Wasserstrals sich nächstens verhalten, wie die Quadrate der Höhen der Wasserstrale selbst.

Es sei demnach bei einem Springbrunnen die Höhe des Behälters h und die Höhe des Wasserstrals i. Bei einem anderen sei die Höhe des Behälters h' und die Höhe des Strals i', so hat man

$$(h - i) : (h' - i') :: i^2 : i'^2$$

oder $(h - i) : i^2 :: (h' - i') : i'^2$

Man setze, der Erfahrung zufolge, $h' = 33$, $i' = 30$, so ist

$$(h - i) : i^2 :: 3 : 900$$
$$(h - i) : i^2 :: 1 : 300$$
$$i^2 = 300 (h - i)$$
$$i^2 = 300 h - 300 i$$
$$i^2 + 300 i = 300 h$$

Löset man diese Gleichuug auf, so kömmt

$$i = 10 \sqrt{(225 + 3h)} - 150$$

oder $i = 10 \sqrt{3 \cdot (75 + h)} - 150$

$$i = 17{,}32 \sqrt{(75 + h)} - 150$$

und es ist $\log. 17{,}32 \ldots = \log. (10 \sqrt{3})$
$$= 1{,}2385606$$

Es sei z. E. die Höhe des Behälters 20 Fuß, so ist

$$i = 17{,}32 \sqrt{(75 + 20)} - 150$$
$$i = 17{,}32 \sqrt{(95)} - 150.$$

$$\log. 17,32 = 1,2385606$$
$$\tfrac{1}{2} \log. 95 = 0,9888618$$
$$2,2274224$$
Zahl 168,82
subtr. 150,00
18,82 Fuß.

Also beinahe 18 Fuß 10 Zoll hoch wird der Stral gehen.

Man bemerke, daß bei dieser Aufgabe die Höhen allemal in Fußen berechnet werden.

Zusatz. Aus

$$i^2 + 300 i = 300 h$$

folget $h = \frac{1}{300} i^2 + i$

welche Gleichung die Höhe des Behälters giebt, wenn die Höhe des Strals, die man verlanget, bestimmet ist.

§. 9.

Aufgabe.

Bei einem Springbrunnen soll die Menge des, während einer gewissen Zeit ausfließenden, Wassers bestimmet werden.

Der Behälter und die Leitungsröhre können zusammen als ein Gefäß betrachtet werden, woraus das Wasser durch eine Oefnung fließt (§. 4). Also können die auf diesen Fall eingerichtete Formeln (H. I §. 13) gebraucht werden: der Durchmesser der Leitröhre kömmt hier nicht in Anschlag, sondern nur die Wasserhöhe, nebst dem Durchmesser der runden Oefnung. Und da bereits angemerket worden, daß bei Springbrunnen die bloße Oefnungen ohne Mundstück am vortheilhaftesten sind (§. 3), so

müssen

müssen unter den Formeln diejenigen gewählet werden, welche für dergleichen Oefnungen eingerichtet sind.

Nämlich es sei d der Durchmesser der Oefnung, z die Zeit in Sekunden, t die Wasserhöhe in Fußen, m die ausfließende Wassermenge in Kubikfußen, so ist (S. 16)

$$m = (3{,}84318)\, d^2 z \sqrt{h}$$

§. 10.

Aufgabe.

Es wird die Zeit verlanget, während welcher der Behälter sich bis zu einer gewissen Tiefe ausleeret.

Diese Aufgabe kann in dem Falle vorkommen, wo der Behälter nicht in eins fort voll erhalten werden kann, sondern von Zeit zu Zeit durch neuen Zuschuß gefüllet werden muß.

Man berechne fürs erste den körperlichen Inhalt desjenigen Theiles des Behälters, dessen Ausleerung gestattet wird, in Kubikfußen. Man suche auch die mittlere Höhe der Wasserfläche im Behälter, von derjenigen horizontalen Ebne an gerechnet, die man in Gedanken durch die Oefnung leget, so wird man nicht viel irren, wenn man die gefundene mittlere Höhe in der Rechnung als eine beständige Wasserhöhe gebrauchet. Gedachte mittelere Höhe sei h in Fußen, der Durchmesser der Oefnung d auch in Fußen, und der gefundene Inhalt m in Kubikfußen, so ist in Sekunden $z = \dfrac{m}{(3{,}84318)\, d^2 \sqrt{h}}$

Diese Formel fließt unmittelbar aus derjenigen, die im vorigen Paragraph angeführet worden.

Exempel wird sich ein jeder ohne Mühe machen können.

§. 11.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Höhe des Wasserstrals, und dem gegebenen Durchmesser seines engsten Durchschnittes, soll die übrige Einrichtung des Springbrunnens bestimmet werden.

I) Aus der gegebenen Höhe des Wasserstrals berechne man die Höhe des Behälters, oder eigentlich die Wasserhöhe. Nämlich es sei die Höhe des Wasserstrals in Fußen i, so ist die Höhe k des Behälters auch in Fußen (§. 8, Zusatz).

$$h = i + \frac{1}{300} i^2$$

II) Man sage, wie $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$, so verhält sich der Durchmesser des gegebenen Durchschnitts zum Durchmesser der Oefnung (§. 3).

III) Den gefundenen Durchmesser, nachdem er in Zollen berechnet worden, nenne man d, die gefundene Höhe in Zollen h, und der Durchmesser der Leitungsröhre auch in Zollen D, so ist (§.7 Anm.)

$$D = \frac{d.\sqrt[4]{h}}{0{,}78367}$$

IV) Man berechne die Menge des, während einer gewissen Zeit, z. E. einer Viertelstunde ausfließenden Wassers (§. 9), und ersinne die gehörigen Mittel, um eben so viel Wasser in derselbigen Zeit herbeizuschaffen (§.6).

V) Man mache den Behälter so groß als nöthig sein wird, um daß er nie leer bleibe, wenn auch die Maschinen, die das Wasser herauf bringen, nicht mit einförmiger Bewegung, sondern Stoßweise gehen. Hierbei kann man die Aufgabe des 10ten Paragraphs zur Hülfe nehmen.

§. 12.

§. 12.

Wenn das Wasser an mehreren Orten springen soll, so werden mit einer einzigen dicken Fallröhre verschiedene Leitröhren verbunden, und es gilt übrigens von jeder Leitröhre und ihrer Oefnung, alles was bisher von Springbrunnen gesaget worden. An der Stelle, wo das Wasser aus der Fallröhre in die Leitröhren tritt, wird es dienlich sein, eine Art von großem Gefäße anzubringen, mit welchem alle Röhren verbunden seien; auf solche Art wird das Wasser freier fließen, und sich besser vertheilen, als wenn es plötzlich, und durch kurze Biegungen aus der Fallröhre in die Leitröhren gehen sollte.

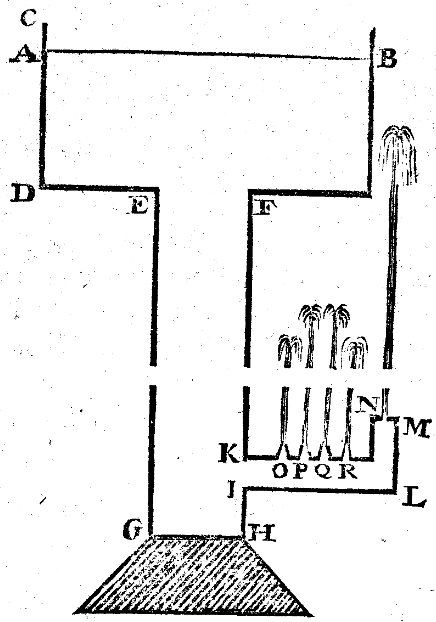
§. 13.

Ich habe, zur Bestätigung der obigen Lehren, einige Versuche mit springendem Wasser gemacht. Dazu bediente ich mich einer solchen Einrichtung, wie sie in der folgenden Figur vorgestellet wird, nur daß die Figur, um den Raum zu ersparen, in der Mitte abgebrochen ist. Man muß sich das Gefäß, die Röhren und Oefnungen alle rund gedenken. Das Instrument ist von verzinntem Eisenblech.

Die Ausmessungen sind folgende in Rheinländischem Maaße, und im Lichten genommen.

	Fuß,	Zolle,	Linien.
AB, Durmesser des Behälters	1	6	—
CD, dessen Höhe	—	6	—
EF, Durchmesser der Fallröhre	—	3	9
EG, deren Höhe	4	—	—
HI, Entfernungen der Leitröhre vom Boden der Fallröhre		2	$\frac{1}{3}$

IK,



	Fuß,	Zolle,	Linien.
IK, Durchmesser der Leitröhre - - -	—	1	$5\frac{1}{3}$
KF - - - -	3	8	$6\frac{1}{3}$
IL - - - -	—	8	3
LM - - - -	—	4	6
MN = IK - - - -	—	1	$5\frac{1}{3}$
Höhe der Aufsatzstücke O, P, Q, R, die oberwärts etwas zugespitzet sind	—	1	—
KO - - - -	—	2	6
OP = PQ = QR -	—	1	4

Mün=

	Fuß,	Zolle,	Linien.
Mündung des Aufsatzstückes O im Durchmesser	—	—	2
Mündung des Aufsatzstückes P im Durchmesser	—	—	1
Mündung des Aufsatzstückes Q, im Durchmesser	—	—	$\frac{1}{2}$
Mundstück des Aufsatzstückes R im Durchmesser	—	—	$\frac{1}{4}$
Oefnung in der Platte MN, im Durchmesser	—	—	$5\frac{1}{6}$
Anfänglich hatte sie nur im Durchm.	—	—	$2\frac{3}{4}$

Die Versuche sind folgender Weise ausgefallen

Art der Oefnung	Durchm. d. Münd.	Höhe des Strals	Wasserhöhe	Unterschied
Zugespiztes Aufsatzstück	2 Lin.	2 F 8 Z. 9 L.	4 F. 0 Z. 6 L.	1 F. 3 Z. 9 L.
Eben so	1	2 F. 11 Z. 3 L.	Eben so	1 F. 1 Z. 3 L.
Eben so	$\frac{1}{2}$	2 F. 11 Z. 3 L.	Eben so	1 F. 1 Z. 3 L.
Eben so	$\frac{1}{4}$	2 F. 8 Z. 9 L.	Eben so	1 F. 3 Z. 9 L.
Bloße Oefnung	$2\frac{3}{4}$	3 F. 4 Z. 8 L.	3 F. 10 Z. $5\frac{1}{3}$ L.	5 Z. $9\frac{1}{3}$ L.
Eben so	$5\frac{1}{6}$	3 F. 7 Z. $9\frac{1}{3}$ L.	Eben so	2 Z. 8 L.

Die vier ersten Versuche bestätigen die Wahrheit, daß Aufsatzstücke gar nichts taugen, und keinen hohen Stral geben. Noch schlimmer ist es, wenn sie, wie hier, eine sehr enge Mündung haben. Sonderbar ist es, daß die Oefnungen von $\frac{1}{4}$ und 2 Linien gleich hohe Strale geben, desgleichen die Oefnungen von $\frac{1}{2}$ und einer Linie.

Der 5te Versuch, zu welchem ich in der Platte MN eine bloße Oefnung von $2\frac{3}{4}$ Linien im Durchmesser machte, beweiset ebenfalls, daß größere Oefnungen, und ohne Aufsatzstück vortheilhafter sind. Die

Der sechste Versuch, zu welchem ich die Oefnung bis $5\frac{1}{6}$ Linien vergrößerte, bestätiget die oben (§. 7) gegebene Regel, in Betreff des Verhältnisses zwischen der Oefnung und der Leitröhre. Denn nach dieser Regel hatte ich die Oefnung berechnet, und man siehet in der That, daß sie den höchsten Stral giebt.

Ich will die Rechnung, den Anfängern zu gefallen, hier hersetzen. Es ist, wenn d den Durchmesser der Oefnung, D den Durchmesser der Röhre, und h die Wasserhöhe, alles in Zollen, bedeutet (§. 7)

$$d = \frac{(0{,}78367)\,D}{\sqrt[4]{h}}$$

Hier ist $D = KI = NM = 1$ Zoll $5\frac{1}{3}$ Linien $= \frac{13}{9}$ Zoll. Die Wasserhöhe h hatte ich angenommen, 3 Fuß 10 Zoll $= 46$ Zoll; also

$$d = \frac{(0{,}78367)\frac{13}{9}}{\sqrt[4]{46}}$$

$$= \frac{(0{,}78367).\ 13}{9.\sqrt[4]{46}}$$

oder, wenn man den Durchmesser d sogleich in Linien haben will,

$$d = \frac{(0{,}78367).\ 13.\ 12}{9\sqrt[4]{46}}$$

log. 0,78367 =	9,8941316!
log. 13,00000 =	1,1139434
log. 12,00000 =	1,0791812
Summe	2,0872562

$\frac{1}{4}$ log.

$$\tfrac{1}{4}\ \log.\ 46 = 0{,}4156894$$
$$\log.\ 9 = 0{,}9542425$$
$$\text{Summe } 1{,}3699319$$

$$\text{Von } 2{,}0872562$$
$$\text{subtr. } 1{,}3699319$$
$$\text{bleibet } 0{,}7173243 = \log.\ d$$
$$\text{Zahl } 5{,}2158 = d$$

ohngefähr $5\tfrac{1}{6}$ Linien $= d$

Nachdem nun die vortheilhafteste Oefnung gefunden worden, so wäre die Frage, wie hoch sich der Stral erheben müsse. Zur Beantwortung haben wie die Formel (§. 8)

$$i = (17{,}32)\sqrt{(75 + h)} - 150$$

wo h die Wasserhöhe in Fußen, und i die Höhe des Strals in Fußen ist. Im gegenwärtigen Falle ist $h =$ 3 Fuß 10 Zoll $= 3\tfrac{5}{6}$ Fuß, also

$$\begin{aligned} i &= (17{,}32)\sqrt{(75 + 3\tfrac{5}{6})} - 150 \\ &= (17{,}32)\sqrt{(78\tfrac{5}{6})} - 150 \\ &= (17{,}32)\sqrt{\tfrac{473}{6}} - 150 \\ &= \frac{(17{,}32)\sqrt{(473)}}{\sqrt{6}} - 150 \end{aligned}$$

$$\log.\ 17{,}32 = 1{,}2385606$$
$$\text{add. } \tfrac{1}{2}\log.\ 473{,}00 = 1{,}3374305$$
$$2{,}5759911$$
$$\text{subtr. } \tfrac{1}{2}\log.\ 6{,}00 = 0{,}3890756$$
$$2{,}1869155$$
$$\text{Zahl } 153{,}79$$
$$\text{subtr. } 150$$
$$3{,}79 \text{ Fuß} = i$$

oder 3 F. 9 Z. $5\tfrac{3}{4}$ Lin. $= i$

Aber

Aber anstatt 3 Fuß 9 Zoll $5\frac{3}{4}$ Linien hat sich der Stral nur erhoben zu 3 Fuß 7 Zoll $9\frac{1}{3}$ Linien. Der Unterschied beträgt 1 Zoll $8\frac{5}{12}$ Linien, und rühret vermuthlich von der unbequemen Einrichtung des Apparats her. Denn erstlich ist eine scharfe Ecke bei L, wodurch die freie Bewegung des Wassers gehindert wird, und zweitens scheinet mir die Leitröhre, in Vergleichung mit der Fallröhre, zu eng zu sein. Da ich das Instrument nicht selbst habe verfertigen lassen, so mußte ich es gebrauchen, wie es war. Es befindet sich im physikalischen Kabinette der Akademie der Wissenschaften.

Drittes Hauptstück.

Von der Bewegung des Wassers, wenn es durch beträchtliche Oefnungen, und durch Röhrleitungen fließt.

§. 1.

Im ersten Hauptstücke haben wir immer angenommen, daß die Oefnung, wodurch das Wasser abfließt, in Vergleich mit der Weite des Gefäßes klein sei. Dieses ist in der That der gewöhnlichste Fall. Auch bei Springwerken kann die Oefnung noch als klein betrachtet werden, wie im zweiten Hauptstücke geschehen ist.

Wenn

Wenn die Oefnung in Betrachtung des Gefäßes groß ist, so bekömmt das Wasser eine Bewegung, die noch kein Mathematikus den Regeln der Wissenschaft hat unterwerfen können. Soll noch dabei das Gefäß beständig voll erhalten werden, so wird die Bewegung durch das häufige und geschwinde Zugießen noch verwickelter; in manchen Fällen, wenn die Oefnung zu groß ist, wird es ganz unmöglich, das ablaufende Wasser zu ersetzen, und das Gefäß wirklich voll zu erhalten. Zum Glücke kommen dergleichen Fälle, wo die Oefnung im Vergleiche mit der Weite des Gefäßes sehr groß ist, in der Anwendung nicht vor, und man kann eine Theorie darüber entbehren.

§. 2.

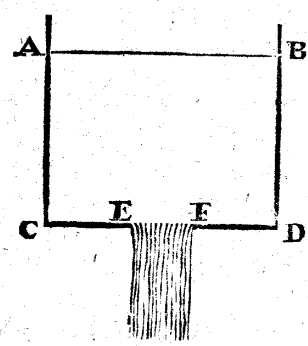
Es giebt Fälle, wo die Oefnung an sich beträchtlich genug, aber doch in Vergleich mit der Weite des Gefäßes unbedeutend ist. Man betrachte zum Beispiel den Raum zwischen zwei Schleusen in einem Kanal, als ein großes Gefäß, so beträgt die Oefnung in der Schleuse, wodurch das Wasser, wenn das Schutzbrett gehoben wird, abläuft, nur einen sehr geringen Theil des Wasserspiegels. Für solche Fälle lassen sich Regeln angeben, welche die Geschwindigkeit und Menge des abfließenden Wassers bestimmen.

§. 3.

Wenn die Oefnung im horizontalen Boden des Gefäßes angebracht, an sich selbst beträchtlich, in Betrachtung des Gefäßes aber unbeträchtlich ist, so kann die Geschwindigkeit und Menge des abfließenden Wassers nach den Regeln für kleine Oefnungen (I. Hauptstück) bestimmet werden, es mag das abfließende Wasser ersetzet werden oder nicht, indem die Regeln nicht sowohl eine Oefnung voraussetzen, die an sich selbst klein sei, sondern eine solche, die im Vergleich mit den Durchschnitten des Gefäßes klein sei.

Die Erfahrung lehret, daß die gedachten Regeln noch ziemlich eintreffen, so lange der Flächen-Inhalt der Oefnung nicht mehr beträgt, als $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{20}$, oder wohl gar $\frac{1}{10}$ des horizontalen Durchschnittes des Gefäßes, vorausgesetzet, daß dieses zylindrisch oder prismatisch sei.

Anmerkung. Ein neuerer Schriftsteller, Herr Bernhard, nimmt gewisse Hypothesen an, woraus folgende Regel fließen würde.



Es sei ABCD ein zylindrisches oder prismatisches Gefäß, welches immer bis AB voll erhalten wird, CD der horizontale Boden, EF eine Oefnung, sie mag groß oder klein sein. Es sei

die Wasserhöhe AC . . . $= h$

Die ganze Bodenfläche CD, die Oefnung mitgerechnet, . . . $= y$

Das Bodenstück, das heißt, die vorige Fläche, weniger die Oefnung, . . $= b$

Die

Die Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper am Ende der ersten Sekunde des Fallens hat, . . . $= p$

Die Geschwindigkeit des durch die Oefnung fließenden Wassers, . . $= v$

so würde aus Herrn Bernhards Theorie folgen, daß

$$v = \left(1 + \frac{b}{y}\right) . \tfrac{1}{2} \sqrt{(2ph)}$$

Wenn die Oefnung sehr klein ist, so daß das Bodenstück b der Bodenfläche y gleich geachtet werden könne, so ist $\frac{b}{y} = 1$, und

$$v = 2 . \tfrac{1}{2} \sqrt{(2ph)}$$

$$v = \sqrt{(2ph)}$$

welches mit der gewöhnlichen Theorie für kleine Oefnungen stimmet (Hauptst. I, §. 10). Wird das Bodenstück b kleiner, so ist der Bruch $\frac{b}{y}$ kleiner als 1, und v nimmt ab. Wäre z. E. $\frac{b}{y} = \frac{1}{2}$, oder das Bodenstück der halben Bodenfläche gleich, so bekäme man

$$v = \tfrac{3}{4} \sqrt{(2ph)}$$

oder die Geschwindigkeit wäre nur noch $\frac{3}{4}$ derjenigen, welche der Höhe h für fallende Körper entspricht.

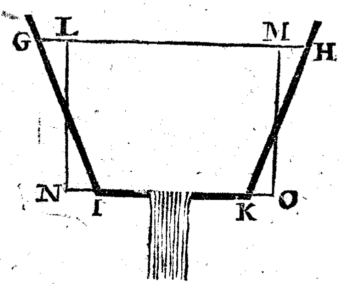
Wird der ganze Boden weggenommen, so ist $b = 0$, und es wird

$$v = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2ph)}$$

Dieses letztere ist wohl falsch, oder vielmehr ohne Sinn; denn wenn der ganze Boden weg ist, so kann das Gefäß nicht mehr voll erhalten werden.

Ueberhaupt beruhet Herrn Bernhards ganze Theorie auf gar keinen festen Gründen, wie es auch Herr Langsdorf in den Anmerkungen zu seiner Uebersetzung, deutlich bewiesen hat. (Siehe **Herrn Bernhards . . . . neue Grundlehren der Hydraulik . . . . mit Anmerkungen, von K. Chr. Langsdorf. . . . . Leipzig und Frankfurt,** 1791.) Indessen habe ich doch das Resultat, oder vielmehr eine Folgerung aus dieser vermeinten Theorie anführen wollen, auf daß man bei Versuchen beobachten könne, ob sie vielleicht bei mittelmäßigen Oefnungen, als bloße hypothetische Erfahrungsregel zu gebrauchen sei.

Wenn das Gefäß nicht prismatisch ist, wie GHIK, so



will Herr Bernhard, daß man anstatt desselben (bis an den Wasserspiegel gerechnet) ein anderes prismatisches LMON von gleichem körperlichen Inhalte eintausche, und dann den Ausfluß für dieses neue Gefäß bestimme. Auch diese Regel hat keinen sichern Grund.

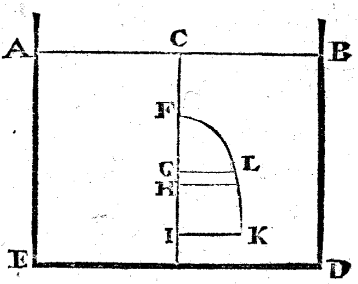
§. 4.

Aufgabe.

Wenn die Wasserhöhe unverändert bleibet, die Oefnung an sich beträchtlich, aber in Vergleich mit

mit dem Gefäße klein ist, und wenn die Oefnung dabei in einem lothrechten Theile der Wand angebracht ist, so soll die Menge des ausfließenden Wassers bestimmet werden.

Da die Oefnung, in Vergleich mit der Weite des Gefäßes klein ist, so kann man annehmen, daß die Geschwindigkeit des, durch jeden Punkt der Oefnung, fließenden Wassers, der für diesen Punkt vorhandenen Wasserhöhe entspricht (H. I, §. 9). Dieses vorausgesetzet,



so sei ABED das Gefäß, FIK eine Oefnung in der lothrechten Wand. Diese Oefnung sei einerseits von der Linie FLK begränzet, welche die lothrechte FI zur Abzissenlinie hat. Man verlängere FI nach C bis zum Wasserspiegel. Es sei $FC = a$, $FG = x$, $GL = y$, $GH = dx$, so ist das kleine Trapezium oder Parallelogramm $HL = y dx$.

Gesetzet es fließe in einer Sekunde durch den Theil FLG der Oefnung einer Wassermenge Q. Man vergrößere die Oefnung, indem man noch das kleine Trapezium HL hinzuthut. So ist die Geschwindigkeit bei G oder H (Hauptst. I, §. 10) $= \sqrt{}(2p.CG) = \sqrt{2p}.\sqrt{CG} = \sqrt{2p}.\sqrt{}(a+x) = \sqrt{2p}.(a+x)^{\frac{1}{2}}$. Multipliziret man diese Geschwindigkeit mit der kleinen Oefnung

HL ($= ydx$), so kömmt die Menge des, in einer Sekunde durch HL fließenden Wassers (H. I, §. 13), also die Zunahme von Q. Es ist demnach

$$dQ = \sqrt{2p}.\ (a + x)^{\frac{1}{2}}.\ ydx$$

$$\text{daher } Q = \sqrt{2p}.\ \int (+ x)^{\frac{1}{2}}\ ydx + C.$$

Es muß, vermöge der Natur der krummen Linie, FLK, y in einer Funkzion von x ausgedrücket werden. Nachdem integriret worden, bestimmet man C aus der Bedingung, daß $x = 0$ auch $Q = 0$ giebt. Will man hernach den Ausfluß aus der ganzen Oefnung FKI haben, so setze man $x =$ FI.

Zusatz I. Es sei die Oefnung ein Parallelogramm, welches $FI = i$ Höhe, und $iK = k$ zur Breite hat, so ist allemal $GL = y = k$, folglich

$$Q = k\sqrt{2p}.\ \int (a + x)^{\frac{1}{2}}\ dx + C$$

Es ist aber $(a + x)^{\frac{1}{2}}\ dx = (a + x)^{\frac{1}{2}}\ d\,(a + x)$, daher das Integral $\frac{2}{3}\,(a + x)^{\frac{3}{2}}$. Also

$$Q = \tfrac{2}{3}\,k\sqrt{2p}.\ (a + x)^{\frac{3}{2}} + C$$

und wenn man C aus der Bedingung bestimmet, daß $x = 0$ auch $Q = 0$ giebt, so ist

$$Q = \tfrac{2}{3}\,k\sqrt{2p}.\ \left[(a + x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$Q = \tfrac{2}{3}\,k\sqrt{2p}\,[(a+x)\sqrt{(a+x)} - a\sqrt{a}]$$

Setzet man x der ganzen Höhe FI gleich, und $FI = i$, so ist

$$Q = \tfrac{2}{3}\,k\sqrt{2p}.\,[(a + i)(a+i) - a\sqrt{a}]$$

$$\text{oder } Q = \tfrac{2}{3}\ \sqrt{2p}.\,IK\,[CI\sqrt{CI} - CF\sqrt{CF}]$$

Die Längen müssen alle in Fußen gerechnet werden. Will man die Wassermenge für eine gewisse in Sekunden gegebene Zeit t haben, so muß der Werth von Q noch mit t multipliziret werden.

Zusatz II.

Zusatz II. Es sei FK eine gerade Linie, und folglich FIK ein rechtwinkeliges Dreieck; es sei $FI = i$, und $IK = k$, so ist $x : y :: i : k$, also $y = \frac{k}{i} x$, folglich

$$Q = \frac{k\sqrt{2p}}{i} \int (a + x)^{\frac{1}{2}} x \, dx$$

Es sei $a + x = u$, so ist $x = u - a$, $dx = du$ und das Integral wird

$$\int u^{\frac{1}{2}}. (u - a) \, du$$

oder $\int \left(u^{\frac{3}{2}} du - a u^{\frac{1}{2}} du\right)$

oder $\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} a u^{\frac{3}{2}}$

also $Q = \frac{2k\sqrt{2p}}{i} \left[\frac{1}{5} (a + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} a (a + x)^{\frac{3}{2}}\right] + C$

Wenn $x = 0$, so ist $Q = 0$, daher

$$C = - \frac{2k\sqrt{2p}}{i} \left[\frac{1}{5} a^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} a^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$C = - \frac{2k\sqrt{2p}}{i} \left[- \frac{2}{15} a^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$C = + \frac{2k\sqrt{2p}}{i} \left[\frac{2}{15} a^{\frac{5}{2}}\right]$$

Folglich

$$Q = \frac{2k\sqrt{2p}}{i} \left[\frac{1}{5} (a + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} a (a + x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15} a^{\frac{5}{2}}\right]$$

und wenn man das ganze Dreieck zur Oefnung nimmt, so ist $x = i$, folglich

$$Q = \frac{2k\sqrt{2p}}{i}\left[\tfrac{1}{5}(a+i)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3}a(a+i)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{15}a^{\frac{5}{2}}\right]$$

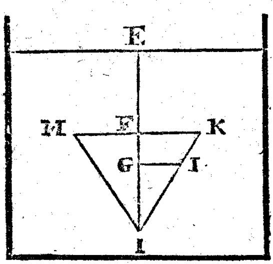
oder

$$Q = \frac{2k\sqrt{2p}}{15i}\left[3(a+i)^{\frac{5}{2}} - 5a(a+i)^{\frac{3}{2}} + 2a^{\frac{5}{2}}\right]$$

Stellet man sich auf der andern Seite der Axe CI, noch ein solches Dreieck vor, so macht die Oefnung ein gleichseitiges Dreieck, wovon i die Höhe und k die halbe Grundlinie ist. In diesem Falle muß die Menge des ausfließenden Wassers verdoppelt werden, also bekömmt man

$$Q = \frac{4k\sqrt{2p}}{15i}\left[3(a+i)^{\frac{5}{2}} - 5a(a+i)^{\frac{3}{2}} + 2a^{\frac{5}{2}}\right]$$

Zusatz III. Ist das rechtwinklichte Dreieck mit der Spitze unten gekehret,



ist dabei EF $= a$, FG $= x$, GL $= y$, so hat man

FI : FK :: IG : GL

i : k :: $(i - x)$: y

daher

daher $y = \frac{ik - kx}{i}$

$$y = k - \frac{k}{i}\,x$$

Also

$$dQ = \sqrt{2p}.\ (a + x)^{\frac{1}{2}}\ (k - \frac{k}{i}\,x)\ dx$$

$$dQ = k\sqrt{2p}.\ (a + x)^{\frac{1}{2}}\ (1 - \frac{1}{i}\,x)\ dx$$

$$dQ = k\sqrt{2p}.\ \left[(a+x)^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{i}\,(a+x)^{\frac{1}{2}}x\,dx\right]$$

das Integral von $(a + x)^{\frac{1}{2}}\ dx$ ist, wie im ersten Zusatze $\frac{2}{3}\ (a + x)^{\frac{3}{2}}$. Das Integral von $(a+x)^{\frac{1}{2}}\ x\,dx$ beträgt, wie im zweiten Zusatze $\frac{2}{5}\ (a+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}a(a+x)^{\frac{3}{2}}$. Folglich haben wir

$$Q = k\sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}\ (a + x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5i}(a+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3i}a(a+x)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$Q = 2k\sqrt{2p}\left[\frac{1}{3}(1+\frac{a}{i})\ (a+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5i}(a+x)^{\frac{5}{2}}\right] + C$$

Wenn $x = 0$, so ist $Q = 0$, folglich

$$0 = 2k\sqrt{2p}\left[\frac{1}{3}\ (1 + \frac{a}{i})\ a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5i}a^{\frac{5}{2}}\right] + C$$

$$0 = 2k\sqrt{2p}\left[\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{a^{\frac{5}{2}}}{3i} - \frac{a^{\frac{5}{2}}}{5i}\right] + C$$

$$0 = 2k\sqrt{2p}\left[\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{2a^{\frac{5}{2}}}{15i}\right] + C$$

$$C = -2k\sqrt{2p}\left[\frac{2}{15i}a^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}\right]$$

Also

$$Q = 2k\sqrt{2p}\left[\tfrac{1}{3}\left(1+\frac{a}{i}\right)(a+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5i}(a+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{15i}a^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}\right]$$

oder, wenn alles in der Paranthese mit $15\,i$ multipliziret, und ausserhalb der Paranthese durch $15\,i$ dividiret,

$$Q = \frac{2k\sqrt{2p}}{15\,i}\left[5\,(i+a)\,(a+x)^{\frac{3}{2}} - 3(a+x)^{\frac{5}{2}} - 2a^{\frac{5}{2}} - 5\,ia^{\frac{3}{2}}\right]$$

Sezet man $x = i$; so kömmt für das ganze rechtwinklige Dreieck

$$Q = \frac{2k\sqrt{2p}}{15\,i}\left[2(a+i)^{\frac{5}{2}} - 2a^{\frac{5}{2}} - 5ia^{\frac{3}{2}}\right]$$

Für zwei solche Dreiecke oder für das Dreieck IKM kömmt doppelt so viel, nämlich

$$Q = \frac{4k\sqrt{2p}}{15i}\left[2(a+i)^{\frac{5}{2}} - 2a^{\frac{5}{2}} - 5\,ia^{\frac{3}{2}}\right]$$

Zusatz IV.

Zusatz IV. Wir haben die allgemeine Formel nur auf geradlinichte Figuren angewandt. Bei krummlinichten, z. E. bei dem Zirkel, geben die Integrale meistens unbequeme unendliche Reihen.

Zusatz V. Es sei wie vorher Q die in der Einheit der Zeit ausfließende Wassermenge; es sei auch S die Oefnung im Quadratmaaße, so kann man sich eine gewisse mittlere Geschwindigkeit v gedenken, die so beschaffen ist, daß wenn alle Wassertheilchen mit derselben durch die Oefnung liefen, dieselbige Wassermenge herauskäme. In dieser Voraussetzung ist

$$Sv = Q$$

$$v = \frac{Q}{S}$$

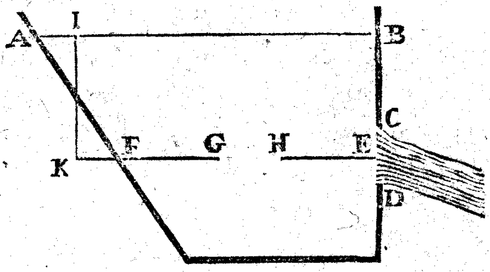
Es sei h die der Geschwindigkeit v entsprechender Höhe, so ist $h = \frac{v^2}{2p}$, also hier $h = \frac{1}{2p}\left(\frac{Q}{S}\right)^2$. Nimmt man diese Höhe vom Wasserspiegel an nach unten zu, so wird sie sich in einem Punkte der Oefnung endigen, wo das Wasser in der That die erwähnte mittlere Geschwindigkeit hat. Diesen Punkt kann man den **Mittelpunkt der Geschwindigkeit** nennen. Ließe er sich auf eine bequeme Art bei jeder Figur bestimmen, so dürfte man nur die Wasserhöhe über ihn ausmessen, und die zustimmende Geschwindigkeit berechnen. Dieses wäre die mittlere Geschwindigkeit, und wenn man sie mit der Oefnung multiplizirete, so bekäme man die in der Einheit der Zeit auslaufende Wassermenge. Indessen da die Formeln für Q schon sehr verwickelt ausfallen, so siehet man wohl, daß sie für $\frac{1}{2p}\left(\frac{Q}{S}\right)^2$ noch verwickelter werden müssen. Man thut also in der Ausübung am besten, wenn man annimmt, das Wasser bewege sich in der ganzen Oefnung mit derselbigen Geschwindigkeit, wie im Schwerpunkte der Oefnung. Die Höhe des Wasserspiegels über diesen Schwerpunkt ist dann die Wasserhöhe, woraus die Geschwindigkeit gefunden wird, und wenn man diese mit der Oefnung multipliziret, so kömmt die Menge des in einer Sekunde auslaufenden Wassers. Wenn man die Rechnung auf beiderlei Arten, nämlich nach dieser Hypothese, und nach den wahren Formeln, für dreieckigte und viereckigte Oefnungen machet, so siehet man bald, daß der Unterschied nicht sehr beträchtlich ist.

Zusatz VI. Nachdem die ausfließende Wassermenge berechnet worden, so muß man nicht vergessen, dieselbe wegen der Verengerung des Strals, und anderer Umstände, mit $\frac{5}{8}$ zu multipliziren. Oder, wenn man die Tiefe des Schwerpunktes unterhalb des Wasserspiegels für die Wasserhöhe annimmt, so kann man sogleich, wie bei sehr kleinen Oefnungen, die Formeln gebrauchen, worin die Verbesserung schon enthalten ist (Hauptst. I, §. 13, Zus. V und VI).

Anmerkung. Herr Bernhard ist mit der gewöhnlichen Art, wie man den Ausfluß aus vertikalen Oefnungen bestimmet, eben so wenig zufrieden, als mit den übrigen gewöhnlichen Regeln der Hydrodynamik (§. 3, Anm.). Seine Meinung läuft ohngefähr auf Folgendes hinaus.

Es sei AB (folg. Fig.) der Wasserspiegel, CD eine vertikale Oefnung von beliebiger Größe und Gestalt, E der Schwerpunkt derselben, so stelle man sich einen durch E gehenden Boden EF vor, und in denselben eine Oefnung GH, der CD gleich. So wird das Wasser aus der wirklichen Oefnung CD eben so ausfließen, als aus der eingebildeten GH, wenn man AFEB als ein Gefäß betrachtet, welches unten frei ist, und im Boden diese Oef-

nung



nung GH hat. Ist das wirkliche Gefäß nicht prismatisch, so muß der Theil AFEB in ein prismatisches Gefäß IKEB verwandelt werden. Dann wird die durch GH ausfließende Wassermenge so bestimmet, wie, nach Herrn Bernhards Meinung, angezeiget worden (Siehe §. 3, Anm.). Was die Eintauschung der Oefnung GH anstatt der gegebenen CD betrift, so stimmet Herrn Bernhards Regel mit der gewöhnlichen (Zus. V dieses §.) überein. Nur will er, seinen Grundsätzen zufolge, daß ferner das Verhältniß des Bodenstücks KE — GH zur ganzen Bodenfläche EK in Anschlag genommen werde, worüber wir schon am angeführten Orte (§. 3, Anm.) unsere Meinung gesaget haben.

§. 5.

Wenn die Oefnung nicht vertikal, sondern schief gegen den Horizont geneigt ist, so wird man nicht viel irren, wenn man wiederum die vertikale Entfernung vom Schwerpunkte der Oefnung bis zum Wasserspiegel, als mittlere Wasserhöhe annimmt, und dann wie bei lothrechten Oefnungen (§. 4) verfährt.

Anmerkung. Auch nach Herrn Bernhards Verfahrungsart wird man das nämliche zu beobachten haben.

§. 6.

§. 6.

Wir haben schon (I Hauptst. §. 7, und 13, Zus. IV) von der Wirkung sehr kurzer Röhren gesprochen, und gezeiget, daß durch dieselben das Wasser zwar etwas langsamer abfließt, als durch bloße Oefnungen, aber dennoch in größerre Menge, weil sich der Wasserstral, der durch die Röhre kömmt, nicht so verengert, als wenn er sich durch eine bloße Oefnung ergösse. Jetzt müssen wir auch untersuchen, wie sich der Ausfluß durch lange Röhren verhält.

§. 7.

Wenn das Wasser aus einem Gefäße durch eine Röhre fließt, welche in horizontaler Lage ist, so scheinet es, daß es eben so und in eben solcher Menge ausfließen sollte, als wenn die Röhre kurz wäre; denn da die Wirkung der Schwere durch die horizontale Lage vernichtet wird, so widerstehet nichts der horizontalen Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser sich im Anfange der Röhre beweget, und diese Geschwindigkeit müßte demnach bis ans Ende der Röhre unverändert bleiben.

Dieses würde auch geschehen, wenn das Wasser nicht an den Wänden der Röhre klebete; durch dieses Ankleben werden die äußersten Theile des in der Röhre fließenden Wasserstrals merklich zurückgehalten; und da diese äußersten Theile mit den mittleren wiederum einen Zusammenhang haben, so werden auch diese in ihrer Bewegung aufgehalten; da nun auf solche Art das Wasser in der ganzen Röhre verspätet wird, so muß auch das aus dem Gefäß nachfolgende, langsamer gehen, und die auslaufende Wassermenge überhaupt vermindert werden. Dieses wird noch einleuchtender, wenn man sich, anstatt des Wassers, eine andere Flüssigkeit gedenket, bei welcher die Klebrichkeit mehr in die Augen fällt, als zum Exempel, Oel.

Ausser

Ausser dieser Zähigkeit oder Klebrichkeit entstehet noch bei der Bewegung des Wassers eine Reibung der Wassertheilchen an der Wand der Röhre, und vermuthlich auch eine Reibung der Wassertheilchen gegen einander. Wenn also das Wasser, was die Klebrichkeit betrift, mit Oel zu vergleichen ist, so kann man es, in Rücksicht auf die Reibung, mit einem feinen Sande vergleichen. Beide Ursachen verspäten den Lauf des Wassers durch eine Röhre.

Das Gesetz, nach welchem die Verspätung, wovon die Rede ist, geschiehet, ist unbekannt. Nur hat die Erfahrung folgendes gelehret.

1) Je länger die Röhre ist, um desto mehr verlieret man an der, in einer gegebenen Zeit ausströmenden, Wassermenge.

2) Je enger die Röhre ist, um destomehr verlieret man ebenfalls.

3) Je größer die Wasserhöhe im Behälter ist, um desto weniger verlieret man, verhältnißmäßig, an der Wassermenge. Bei einer sehr geringen Wasserhöhe und einer sehr langen Röhre will das Wasser fast gar nicht fließen, wenn die Röhre nicht etwas geneiget ist.

4) Bei einer Röhre, die 1 bis 2 Zoll im Durchmesser hat, und wenn die Wasserhöhe, von der Axe der Röhre an gerechnet, 1 bis 2 Fuß beträgt, nimmt die ausfließende Wassermenge, in einer Entfernung von 30 Fuß etwa schon um die Hälfte oder noch mehr ab; in einer Entfernung aber von 180 Fuß aber fließt nur noch ohngefähr der 5te Theil des Wassers, welches durch einer sehr kurzen Röhre fließen müßte.

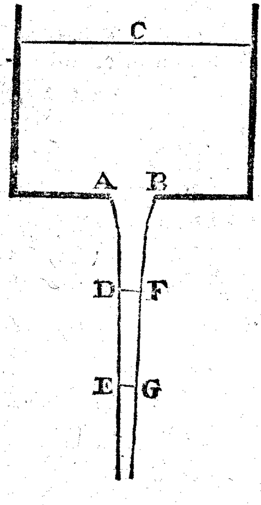
§. 8.

Wenn das Wasser durch eine vertikale Röhre fließt, die mit dem Boden des Gefäßes verbunden ist, so müßte es, wenn es nicht an der Röhre klebete, eben so herunterfallen, als wenn die Röhre gar nicht vorhanden wäre.

Stellet

Stellet man sich dabei das Wasser als vollkommen flüssig vor, ohne daß dessen Grundtheilchen auf irgend eine Art auf einander wirken, so ist jedes durch die Oefnung kommende Theilchen ein schwerer Körper, der schon die der Wasserhöhe entsprechende Geschwindigkeit hat, und seine Geschwindigkeit noch immer noch mehr und mehr beschleuniget, wie es die Gesetze fallender Körper mit sich bringen. So würden ohngefähr Sandkörnchen aus einem Gefäße fallen, welches im Boden eine Oefnung, mit oder ohne eine lothrechte Röhre, hätte.

Erinnert man sich aber, daß das Wasser nicht vollkommen flüssig ist, so wird man einsehen, daß es zwar an jeder Stelle, wo es sich beim Herunterfallen befindet, eine Geschwindigkeit haben muß, welche der Wasserhöhe entspricht, wenn man sie von der gedachten Stelle bis zum Wasserspiegel rechnet; daß aber der Stral sich zugleich je mehr und mehr verengern muß.



Denn

Denn, da das Wasser in der Oefnung AB schon die der Höhe AC entsprechende Geschwindigkeit hat, so beweget es sich ferner, als wenn es von C herunter gefallen wäre, also verhalten sich die Geschwindigkeiten, vermöge der Dynamischen Regeln, in D und E zum Exempel, wie $\sqrt{CD}$ zu $\sqrt{CE}$. Da nun das Wasser bei E geschwinder fließt, als bei D, und da doch in einer gewissen Zeit durch DF, EG &c. weder mehr noch minder Wasser fließen kann, als zugleich durch die Oefnung AB kömmt, da auch das Wasser sich wegen seiner Kohärenz zusammen hält, so muß der Durchschnitt EG enger werden, als der Durchschnitt DF. Es muß nämlich sein

$$DF \times \sqrt{(CD)} = EG \times \sqrt{(CE)}$$

oder $DF : EG :: \sqrt{(CE)} : \sqrt{(CD)}$

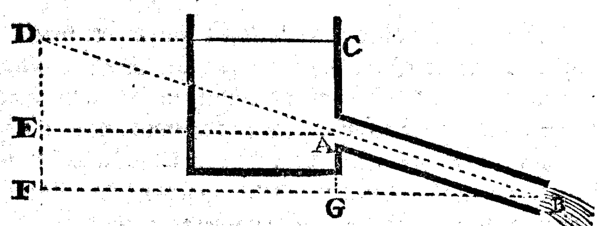
oder es müssen sich die Durchschnitte umgekehret verhalten, wie ihre Tiefen unter dem Wasserspiegel. Auf solche Art müßte das Wasser abfließen, wenn keine Röhre vorhanden wäre, und auch die Luft seiner Bewegung nicht widerstünde.

Beweget sich aber das Wasser in einer vertikalen Röhre, so klebet es an den Wänden der Röhre, und da dieses anklebende Wasser mit dem übrigen zusammenhängt, so verengert sich der Wasserstral nicht, sondern er fließt so dick, als die Röhre ist. Bei solchen Umständen müßten die niederen Wassertheilchen, welche geschwinder gehen, als die oberen, sich allmählig von den oberen absondern; dieses läßt aber der Zusammenhang des Wassers nicht zu, sondern die niederen beschleunigen nur die Bewegung der oberen, indem sie dieselben mit herunter ziehen; vermuthlich werden auch hingegen die oberen Theilchen die unteren etwas verspäten. Indessen lehret die Erfahrung, daß wirklich mehr Wasser durch eine etwas lange vertikale Röhre, als durch eine ganz kurze ausläuft. Jedoch verhält sich die Geschwindigkeit und Wassermenge nicht wie die Quadratwurzel der Wasserhöhe, vom unteren Ende der Röhre, bis zum Wasserspiegel gerechnet, obgleich einige Schriftsteller dieser Meinung sind. Nur bei ziemlich kurzen Röhren trift dieses einigermaßen zu.

Noch ist zu merken, daß der Widerstand der Luft dazu beiträgt, die Wassersäule in der Röhre zusammen zu halten. Indessen, wenn die Röhre sehr lang ist, so kann zulezt der Zusammenhang aufhören, so daß die Wassertheilchen sich absondern, oder auch, daß das Wasser wirklich anfängt, einen Stral zu bilden, der sich je mehr und mehr verengert.

§. 9.

Wenn die Röhre, wie AB, gegen den Horizont schief liegt, und wenn man alle Neben-Umstände aus der Acht läßt, so hat das bei A in die Röhre eintretende Wasser die der Höhe CA entsprechende Geschwindigkeit. Man ver-



längere die Axe BA der Röhre rückwärts, bis daß sie den (nöthigenfalls verlängerten) Wasserspiegel in D schneidet, so kann man sich vorstellen, das Wasser sei schon in schiefer Richtung von D bis A herunter geglitten. Denn in diesem Falle würde es ebenfalls bei A eine Geschwindigkeit haben,

haben, welche der Höhe DE oder AC entspräche. Nun fährt es fort von A bis B zu gleiten, und wenn es in B gekommen ist, so hat es die nämliche Geschwindigkeit, als wenn es längs der ganzen DB herunter geglitten wäre, und diese Geschwindigkeit entspricht bekannter Maaßen der Höhe DF oder CG. Indessen, da die Bewegung von A bis B beschleuniget ist, so wird der Wasserstral, immer enger und enger, obgleich die ausfließende Wassermenge die nämliche bleibet, als wenn die Röhre nur ganz kurz wäre. Was an der Wassermenge durch die Verengerung des Strals abgehet, wird durch die größere Geschwindigkeit ersetzet.

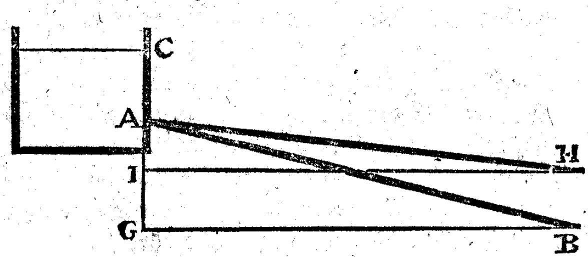
Dieses hätte seine Richtigkeit, wenn die Wassertheilchen weder unter einander, noch mit den Wänden der Röhre einen Zusammenhang hätten. Da dieser Zusammenhang aber Statt findet, so sind hier die nämlichen Betrachtungen zu machen, wie bei vertikalen Röhren, nämlich der Wasserstral verengert sich nicht, sondern füllet allenthalben die Röhre aus; das vorangehende Wasser ziehet das folgende nach sich und beschleuniget es, und wenn die Neigung groß genug ist, so kömmt in der That mehr Wasser aus der Oefnung B, als wenn die Röhre sehr kurz wäre. Indessen richtet sich auch hier die Wassermenge nicht nach der Quadratwurzel der Höhe CG, ausgenommen vielleicht, wenn die länge der Röhre nicht beträchtlich ist und auch dann nur ohngefähr.

Wenn der Winkel, welchen die Röhre mit dem Horizonte machet, nur wenige Grade beträgt, so verspüret man gar keine Vergrößerung der Wassermenge, sondern es kömmt ohngefähr eben so viel Wasser, als die Röhre bei ihrem Anfange geben würde. Dieses geschiehet, nach Herrn Bossüt, bei einem Winkel mit dem Horizonte von ohngefähr $6\frac{1}{2}$ Grad.

Bei einem noch geringeren Neigungs-Winkel würde die Wasser-Ausgabe noch abnehmen, und sich je mehr und mehr derjenigen nähern, die durch eine horizontale lange Röhre geschiehet (§. 8).

Herr Langsdorf, in seinen Anmerkungen zu Bernhards Hydraulik (Seite 99 und 100), giebt diese Regel an. Wenn die Röhre so viel Wasser geben soll, als durch die bloße Oefnung ohne Röhre ausfließen würde, nämlich $\frac{5}{8}$ derjenigen Wassermenge, welche ohne die Verengerung des Strals ausfließen müßte, so gebe man der Röhren-Leitung auf 100 Fuß (AB) ein Gefälle AG, welches der Wasserhöhe AC im Gefäße gleich sei. Ist AB = 200, 300, 400 Fuß, &c., so muß man nehmen AG = 2 AC, 3 AC, 4 AC, &c. Diese Regel hat Herr Langsdorf aus seinen eigenen Erfahrungen abstrahiret.

Nachdem man vermittelst dieser Regel das Gefälle für eine gegebene Röhre gefunden hat, wodurch man dieselbige Wassermenge erhält, als wenn gar keine Röhre vorhanden wäre, so will Herr Langsdorf, man bestimme folgender Maaßen den wirklichen Ausfluß.

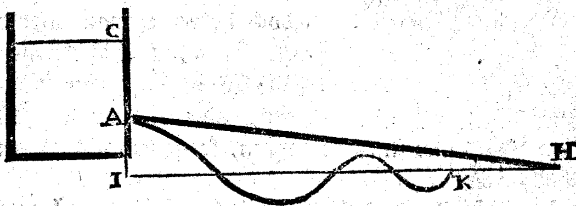


Es sei AC die Wasserhöhe über der Oefnung A, AB die gegebene Länge der Röhre, man sage, 100 Fuß geben ein Gefälle = AC, was giebt die Länge AB. Dadurch findet man AG. Das wirkliche Gefälle sei aber nicht AG, sondern AI, und die Röhre in der Lage AH. So sage man ferner, wie $\sqrt{CG}$ zu $\sqrt{CI}$, so verhält sich die aus der Oefnung A frei ausfließende Wassermenge zu der, welche aus der Röhre in der Lage AH fließet.

§. 10.

§. 10.

Wenn die Röhre, wodurch das Wasser abläuft, auf verschiedene Art gebogen und gekrümmet ist, so vermindert dieser Umstand noch die ausfließende Wassermenge, hauptsächlich, wenn die Ecken etwas scharf sind. Man wird nicht sehr irren, wenn man folgendermaaßen verfährt.



Es sei AK die krumme Röhre. Durch das Ende K ziehe die horizontale Linie IKH. Verwandele die krumme Röhre in eine gerade AH, welche die nämliche Länge habe. Lege in Gedanken das eine Ende in A, und das andere auf die horizontale Linie IH. Da die Röhre AH eben so lang ist als AK, so wird das Wasser in der eingebildeten AH ohngefähr eben so viel Hindernisse zu überwinden haben, als in der wirklichen AK, und da der Punkt H eben so hoch lieget als K, so wird das Wasser aus K fast eben so geschwinde fließen, als aus H. Nun verfahre man mit dieser Röhre AH nach Herrn Langdorfs Methode (§. 9), und suche, wie viel Wasser sie giebt.

Dieser Vorschlag verdienet wohl durch neue Erfahrung geprüft zu werden. Herr Bossüt, der ohngefähr einen ähnlichen Gedanken hatte, findet ihn nicht mit der Erfahrung übereinstimmend. Indessen könnte man noch manches gegen seine Versuche und seine Theorie erinnern. Jedoch ist zu vermuthen, daß die auf diese Art heraus-

 gebrachte

gebrachte Wassermenge immer etwas zu groß sein würde, indem die Biegungen selbst, hauptsächlich wenn sie scharfe Ecken machen, den Lauf des Wassers immer etwas hindern.

Bei gebogenen und gekrümmten Röhren, so wie bei geraden, ist der Verlust an Geschwindigkeit und Wassermenge um desto kleiner, je größer die Wasserhöhe im Gefäße über der Oefnung ist.

Vertikale Biegungen vermindern den Ausfluß nicht viel mehr als horizontale, jedoch bemerket man einen kleinen Unterschied, hauptsächlich, wenn die Wasserhöhe nur gering ist. Wenn man also die Wahl hat, eine Röhrenleitung entweder auf und nieder, oder in krummen Wendungen rechts und links zu führen, so ist das leztere etwas vortheilhafter.

Die Luft, die das Wasser mit sich führet, pfleget sich gern an einigen Stellen der Röhren zu sammeln, wodurch die Bewegung des Wassers verhindert wird. Hauptsächlich geschiehet dieses bei vertikalen Krümmungen, an den obersten Stellen. Dieses ist vermuthlich die Ursache, warum, wie kurz vorher erinnert worden, vertikale Biegungen etwas schädlicher sind, als horizontale. Um diesem Uebel abzuhelfen, machet man an den gedachten Stellen kleine vertikale Aufsatzröhren, welche oben mit einwärts gehenden Ventilen versehen sind. Diese Ventile sind nicht leicht genug, um sich durch die herausgehende Luft zu verschließen. Hingegen, wenn das Wasser heraustreten will so verschließt es selbst die Oefnungen. Oder man verschließt diese Aufsatzröhren mit Hähnen, und öfnet sie nur jedesmal, wenn man es für nöthig erachtet.

Herr Bossüt hat in seiner Hydrodynamik eine Tafel gegeben, welche verschiedene Versuche mit geraden und krummen Röhren enthält, und Herr Bernhard hat die nämliche Tafel in sein Werk eingeschaltet. Herr Langsdorf erinnert, daß die Gestalten der Röhren nicht genau genug bestimmet sind. Ich füge noch hinzu, daß die

Wasser-

Wasserhöhe allemal von äußerstem Ende der Röhre bis zum Wasserspiegel gerechnet ist, und daß die Höhe vom Anfange der Röhre bis zum Wasserspiegel gerechnet, nicht angezeiget ist. Wenn nun, wie es scheinet, die Wassermenge zum Theile von dieser letzteren Höhe abhängt, so ist ein wirklicher Mangel in der Tafel.

Anmerkung. Herr Bernhard stimmet mit den übrigen Hydraulikern, in Betreff der Röhren. Er meinet, die Röhre mag so schief geneigt sein, wie man will, ja sie mag gar in lothrechter Richtung herunter gehen, so könne doch die Wassermenge nie größer werden, als wenn die Röhre nur ganz kurz wäre. Dieses hätte seine Richtigkeit, wenn das Wasser keinen Zusammenhang weder mit sich selbst, noch mit der Röhre hätte, ist aber im wirklichen Zustande der Dinge, der Erfahrung zuwider. Ferner tadelt es dieser Verfasser, daß man bei Berechnung der Wassermenge, welche abfließen müßte, wenn die Röhre nur ganz kurz wäre, keine Rücksicht auf die Größe der Oefnung nimmt, sondern sie immer als unbeträchtlich behandelt. Er will, wenn die Röhre nicht sehr dünn ist, man solle die Geschwindigkeit nach seiner Methode (§. 7, Anmerk.) berechnen, daraus die Wassermenge schließen, und hievon, wie gewöhnlich, $\frac{13}{16}$ nehmen. So bekömmt man, nach seiner Meinung, den Ausfluß aus einer sehr kurzen Röhre, womit man dann die Erfahrungen vergleichen kann. Wie ungewiß aber seine Regeln überhaupt sind, ist schon am angeführten Orte erinnert worden.

Viertes Hauptstück.

Von dem Widerstande und dem Stoße der Flüssigkeiten.

§. 1.

Lehrsatz.

Wenn sich eine ebene Fläche in einer ruhenden Flüssigkeit beweget, und wenn die Richtung der Fläche gegen sie selbst senkrecht ist, so verhält sich der Widerstand den sie leidet, wie die Größe der Ebne, wie die Dichtigkeit des Flüssigen, und wie die Quadratzahl der Geschwindigkeit.

Gesetzt die Ebne gehe mit der Geschwindigkeit v, das heißt, sie durchlaufe in der Einheit der Zeit einen Weg v, und in dieser Zeit verdränge sie eine Masse m des Flüssigen, so ist dazu eine Kraft k erforderlich, so daß

$$k = mv$$

Ferner ist die verdrängte Masse gleich ihren Volumen l, mit der Dichtigkeit d multipliziret, also ist

$$k = l. d. v$$

Weiter

Weiter, ist das verdrängte Volumen v nichts anders, als eine prismatische Säule des Flüssigen, welche vor der bewegten Ebne lag, diese Ebne zur Basis hatte, und so hoch oder lang war, als der Weg den die Fläche in der Einheit der Zeit zurückgeleget hat. Es sei demnach der Quadrat-Inhalt der Fläche $= s$, so ist

$$l = s.\ v$$

daher $k = s.\ v.\ d.\ v$

oder $k = s.\ d.\ v^2$

so viel Kraft nun nöthig ist, um das Flüssige zu verdrängen, so viel thut es Widerstand. Wenn wir den Widerstand mit r bezeichnen, so haben wir demnach ebenfalls

$$r = s.\ d.\ v^2$$

Betrachtet man die Größen s, d, v, r als veränderlich, so ist das Produkt r im zusammengesetzten Verhältnisse seiner Faktoren s, d, v^2, welches unseren Lehrsatz beweiset.

Zusatz I. Bei gleichen Flächen und Dichtigkeiten, das heißt, wenn s und d unverändert bleiben, verhalten sich die Widerstände wie die Quadratzahlen der Geschwindigkeiten. Verschiedene andere Verhältnisse wird ein jeder selbst aus der Gleichung $r = s.\ d.\ v^2$ herleiten, wenn man nach und nach eine oder zwei der Größen s, d, v, als unveränderlich betrachtet.

Zusatz II. Bei dem Beweise wird vorausgesetzet, daß die Theilchen der Flüssigkeit, so bald sie angestoßen worden, vernichtet werden. In der Wirklichkeit aber begeben sie sich seitwärts, um die stoßende Fläche durchzulassen, und da dieses nicht plötzlich, sondern allmählig geschiehet, so wirken sie auch auf die etwas entfernteren Theile der Flüssigkeit, ehe diese noch von der stoßenden

 Fläche

Fläche berühret werden. Daraus entstehet beständig vor der bewegten Fläche eine Bewegung der Theilchen der Flüssigkeit in divergirenden Richtungen. Dieses muß nothwendig die Quantität des Widerstandes merklich verändern.

Gesetzet also, der wahre Widerstand sei a mal so groß, als im Beweise angegeben worden, so ist

$$r = a . s . d . v^2$$

wo a auch ein Bruch sein kann. Wenn dieser Faktor a eine beständige Größe ist, so wird dadurch in den Verhältnissen nichts geändert. Da nun die Erfahrung diese Verhältnisse so ziemlich bestätiget, so kann a in der That als eine unveränderliche Größe angenommen, und das Verhältniß unseres Lehrsatzes als ziemlich richtig beibehalten werden.

Zusatz III. Es scheinet hier, daß die Gesetze der Bewegung für flüssige Materien ganz anders ausfallen, als für feste, indem bei diesen immer nur die bloße Geschwindigkeit bei der Quantität der Bewegung und des Widerstandes in Betrachtung kömmt, bei jenem aber das Quadrat der Geschwindigkeit. Dieser Unterschied aber rühret daher, daß bei flüssigen Materien die bewegte Masse veränderlich ist, und selbst von der Geschwindigkeit abhängt. Die Quantität der Bewegung verhält sich eigentlich nie anders, als wie die Masse und wie die Geschwindigkeit; da aber bei flüssigen Dingen die bewegte Masse selbst sich wie die Geschwindigkeit verhält, so ist das Verhältniß der Geschwindigkeit gedoppelt, oder es entstehet das Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit. Dafür aber wird alsdann das Verhältniß der Masse nicht ausdrücklich angeführet, weil es schon in dem Verhältnisse der quadrirten Geschwindigkeit mit enthalten ist. Die allgemeine Regel, daß die Quantität der Bewegung und folglich

folglich die bewegende Kraft sich wie die Masse und die Geschwindigkeit verhält, bestehet demnach in allen Fällen, auch beruhet der obige Beweis selbst darauf.

§. 2.

Lehrsatz.

Bei einer elastischen Flüssigkeit verhält sich der Widerstand eben so, als wenn sie unelastisch wäre.

Während daß ein elastisches Theilchen der Flüssigkeit von der bewegten Fläche gestoßen wird, so wirket es gegen die bewegte Fläche zurück, und dieses mit einer Kraft, die derjenigen gleich ist, womit es zusammengedrücket worden, oder womit es gestoßen worden, und diese ist gleich dem Widerstande des Theilchens. Also ist die Zurückwirkung dem bloßen aus der Trägheit entstandene Widerstande gleich; und da die Zurückwirkung sowohl, als der eigentliche Widerstand, der Bewegung der Ebne entgegengesetzet ist, so muß sie selbst als ein Theil des Widerstandes betrachtet werden. Folglich ist bei elastischen Flüssigkeiten der Widerstand doppelt so groß, als bei unelastischen, wenn nämlich sonst die stoßende Fläche, und die Dichtigkeit der Flüssigkeit einerlei sind. Weil also bei unelastischen Flüssigkeiten der Widerstand durch $s.\ d.\ v^2$ (§. 1) ausgedrücket wird, so beträgt er bei elastischen $2\ s.\ d.\ v^2$. Und da die Zahl 2 eine beständige Größe ist, so giebt die Gleichung $r = 2.\ s.\ d.\ v^2$ die nämlichen Verhältnisse, als vorher $r = s.\ d.\ v^2$.

Zusatz I. Hier gelten die nämlichen Betrachtungen, die vorher bei unelastischen Flüssigkeiten gemacht worden (§. 1, Zus. II). Nimmt man an, daß durch den Umstand, daß die elastischen Theilchen seitwärts ausweichen müssen, der Widerstand a mal vergrößert wird, welches

a auch

a auch ein Bruch sein kann, so hat man für elastische Flüssigkeiten

$$r = 2. a. s. d. v^2$$

und die Verhältnisse bleiben unverändert, wenn nur a eine beständige Größe ist, wie sie, der Erfahrung gemäß, zu sein scheinet.

Zusatz II. Bei dem Beweise ist vorausgesetzet, daß die Elastizität des Flüssigen vollkommen sei, oder daß es sich mit eben so viel Kraft wieder herstelle, als gebrauchet worden, um es zusammen zu drücken. Ist sie unvollkommen, so wird der Widerstand nicht zweimal, sondern zwischen ein und zweimal so groß sein, als bei unelastischen Flüssigkeiten. Gesetzet, die Wiederherstellungs-Kraft sei b mal so groß, als die Zusammendrückung, wo b, im Falle der unvollkommenen Elastizität, ein Bruch ist, so wird der Widerstand $r = a. s. d. v^2$ nur um $b. a. s. d. v^2$ vermehret, und man bekömmt

$$r = (1 + b). a. s. d. v^2$$

da aber $(1 + b)$ eine beständige Größe ist, so werden auch durch diesen Faktor die Verhältnisse nicht verändert, und auch bei solchen Flüssigkeiten, welche nur eine unvollkommene Elastizität besitzen, gelten die nämlichen Verhältnisse, wie bei unelastischen und bei vollkommen elastischen Flüssigkeiten.

Anmerkung. Bisher haben die Physiker und Mathematiker auf den Grad der Elastizität, sowohl fester als flüssiger Materien zu wenig Rücksicht genommen; sie haben meistens immer angenommen, daß die Körper, welche sie betrachteten, entweder vollkommen elastisch, oder ganz unelastisch wären. Zum Exempel, bei Untersuchungen, welche die Luft betreffen, wird sie immer als vollkommen elastisch betrachtet, und man ist nicht einmal

einmal darauf bedacht gewesen, den Grad ihrer Elastizität zu bestimmen, welches doch höchst nöthig wäre. Denn, obgleich die Unvollkommenheit der Elastizität, wie wir gesehen haben, nicht allemal die Verhältnisse verändert, so verändert sie doch gewiß die absolute Quantität des Widerstandes.

Was die festen Körper betrift, so habe ich in meiner Dynamik gegen das Ende des zweiten Hauptstückes dafür gesorget, daß die Gesetze ihres Stoßes, für den Fall, wo sie unvollkommen elastisch sind, nicht unberühret bleiben.

§. 3.

Lehrsatz.

Wenn eine bewegte Flüssigkeit gegen einen unbeweglichen festen Körper stößt, so beträgt die Kraft des Stoßes eben so viel, als der Widerstand betragen würde, wenn das Flüssige in Ruhe wäre, und der feste Körper sich in demselbigen in entgegengesetzter Richtung mit einerlei Geschwindigkeit bewegete.

Denn die Stärke des Stoßes, sowohl bei flüßigen, als bei festen Materien, richtet sich nicht nach den absoluten Bewegungen, sondern nach den relativen, und besonders nach der relativen Geschwindigkeit. Diese aber ist einerlei, es mag sich das Feste oder das Flüssige bewegen, wenn nur die Geschwindigkeit einerlei ist.

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn sich sowohl das Feste als das Flüssige, entweder in einerlei Richtung, oder in entgegengesetzten Richtungen, bewegen; so ist der Widerstand

stand oder der Stoß, eben so stark, als wenn eines von beiden ruhete, und das andere sich mit der relativen Geschwindigkeit beider bewegete.

Denn nur die relative, nicht die absolute Geschwindigkeit, bestimmet die Stärke des Stoßes. Siehe den Beweis des vorhergehenden Satzes.

§. 5.

Lehrsatz.

Es mag die Flüssigkeit elastisch oder unelastisch sein, so verhält sich der Widerstand oder der Stoß, wie die senkrecht gestoßene Fläche, wie die Dichtigkeit des Flüssigen, und wie die Höhe, welche der Geschwindigkeit entspricht.

Für unelastische Flüssigkeiten war (§. 1, Zus. II)

$$r = a.\ s.\ d.\ v^2$$

Stellet man sich nun einen im leeren Raume fallenden Körper vor, dessen Geschwindigkeit ebenfalls v ist, so muß dieser Körper von einer gewissen Höhe gefallen sein, um diese Geschwindigkeit v zu erhalten; und es ist, vermöge der dynamischen Gesetze,

$$h = \frac{v^2}{2p}$$

oder $v^2 = 2.p.h$

wo p die durch den Fall während der ersten Zeitsekunde erhaltenen Geschwindigkeit, oder die doppelte Fallhöhe für die erste Zeitsekunde, ist. Setzet man diesen Werth von v^2 in die Gleichung $r = a.\ s.\ d.\ v^2$, so kömmt

$$r = 2.\ a.\ s.\ d.\ p.\ h$$

oder $r = 2.\ a.\ p.\ s.\ d.\ h$

Da

Da nun 2, a und p beständige Größen sind, so verhält sich r wie die Fläche s wie die Dichtigkeit d, und wie die Höhe h, welche der Geschwindigkeit entspricht.

Für vollkommen elastische Körper war (§. 2)

$$r = 2.\ a.\ s.\ d.\ v^2$$

und für unvollkommen elastische (§. 2, Zus. II)

$$r = (1 + b).\ a.\ s.\ d.\ v^2$$

Setzet man hier ebenfalls $2ph$ anstatt v^2, so kömmt

$$r = 4.\ ap.\ s.\ d.\ h$$

$$r = 2\ (1 + b).\ a.\ p.\ s.\ d.\ h$$

Da nun $4.\ a.\ p$, und $2.\ (1 + b).\ a.\ p$, beständige Größen sind, so bleiben die Verhältnisse wie bei unelastischen Flüssigkeiten.

Zusatz I. Bei einerlei Fläche und Dichtigkeit, verhalten sich die Widerstände oder Stöße wie die, den Geschwindigkeiten entsprechende Fallhöhen. Noch andere Verhältnisse bekömmt man, wenn man eine oder zwei der Größen s, d, und h als beständig annimmt.

Zusatz II. Wenn also eine und dieselbige Fläche sich in einer und derselbigen Flüssigkeit beweget, so verhält sich in jedem Zeitpunkt der Widerstand, wie die der Geschwindigkeit entsprechende Höhe, oder wie das Quadrat der Geschwindigkeit (§. 1, Zus. I). Eben so verhält sich der Stoß, wenn sich das Flüssige allein beweget (§. 3). Wenn sich das Flüssige nnd das Feste zugleich bewegen, so muß anstatt der absoluten Geschwindigkeit, die relative verstanden werden (§. 4).

§. 6.

Lehrsatz.

Wenn die Richtung der Bewegung gegen die Fläche senkrecht ist, so beträgt in jedem Augenblicke

blicke der Widerstand, oder der Stoß der Flüssigkeit, ohngefähr soviel als das Gewicht einer Säule des Flüssigen, deren Grundfläche so groß ist, als die gestoßene Fläche, und deren Höhe der Geschwindigkeit entspricht.

Wir haben für unelastische Flüssigkeiten gefunden (§. 5)

$$r = 2.\, a.\, p.\, s.\, a.\, h$$

Dieser Widerstand oder Stoß (§. 3) wurde aber für die Einheit der Zeit berechnet (§. 1 und 5). Will man ihn für eine gewisse Dauer der Zeit haben, so muß man ihn mit solcher Zeit multipliziren. Für eine unendlich kurze Zeit dt hat man also

$$r = 2.\, a.\, p.\, s.\, h.\, d.\, dt$$

$$\text{oder } r = a.\, 2shd.\, pdt$$

Nun ist sh der kubische Inhalt einer solchen Säule wie im Lehrsatze erwähnet wird, folglich ist shd ihre Masse. Ferner ist pdt die Wirkung der Fallkraft in einem Augenblicke. Also ist $2shd.\, pdt$ das doppelte Gewicht einer solchen Säule. Diesem doppelten Gewichte würde der augenblickliche Widerstand gleich sein, wenn jedes Theilchen der flüssigen Materie, sogleich nach geschehenem Stoße vernichtet würde. Da dieses aber nicht geschiehet (§. 1, Zus. II), so muß noch die Zahl a aus der Erfahrung bestimmet werden, und man hat aus vielen Erfahrungen geschlossen, daß $a = \frac{1}{2}$, das heißt, daß die wirkliche Resistenz ohngefähr halb so groß ist, als die nach der angenommenen Hypothese berechnete. Also ist in jedem Augenblicke

$$r = \tfrac{1}{2}.\, 2shd.\, pdt$$

$$\text{oder } r = shd.\, pdt$$

Die Resistenz ist also dem Gewichte des bewußten Prisma gleich.

Bei

Bei vollkommen elastischen Flüssigkeiten findet man für jeden Augenblick (§. 5)

$$r = a. 4shd. pdt$$

und die Erfahrung lehret, wenn man Versuche in der Luft machet, und diese als vollkommen elastisch betrachtet, daß hier $a = \frac{1}{4}$, also hat man ebenfalls $r = shd. pdt$, und der Widerstand ist auch hier dem bewußten Prisma gleich. Er sollte, zufolge der Hypothese, doppelt so groß sein, als bei unelastischen Flüssigkeiten (§. 2 und 5). Da er es aber nicht ist, so müssen gewisse Umstände vorfallen, welche die Wirkung der Elastizität aufheben. Da die Flüssigkeit, nach dem Stoße oder Widerstande sich seitwärts begiebt, und sich dann wiederum hinter dem festen Körper oder der Fläche schließet, so kann sie vielleicht durch ihre Elastizität, gegen die hintere Fläche eine Wirkung äußern, wodurch die Wirkung der Elastizität auf die vordere Fläche gehoben wird.

Anmerkung I. Da die Elastizität der Luft vermuthlich nicht vollkommen ist, so mag auch dieser Umstand dazu beitragen, daß ihr absoluter Widerstand kleiner ist, als man nach der Theorie vermuthen sollte (§. 5).

Anmerkung II. Da die Resistenz oder der Stoß in jedem Augenblicke dem Gewichte einer gewissen Säule des Flüssigen gleich ist, so darf man sich bei einer Bewegung von einer gewissen Dauer nur vorstellen, daß eine Kraft, welche diesem Gewichte gleich ist, beständig gegen die Fläche wirket, welche den Widerstand leidet, oder welche den Stoß empfängt.

Anmerkung III. Der Stoß oder der Widerstand einer Flüssigkeit ist eine Kraft, die nicht plötzlich, sondern durch einen fortgesetzten Druck wirket. Eben so wirket auch das Gewicht eines Körpers. Daher kömmt es, daß der Stoß oder der Widerstand des Wassers sich mit einem Gewichte vergleichen läßt, welches bei dem Stoße fester Körper nicht angehet. Da bei diesen die ganze Wirkung plötzlich geschiehet, so kann man sie zwar auch mit der Fallkraft vergleichen, aber nur mit der, so zu sagen, schon angehäuften Fallkraft eines Körpers, der eine Strecke lang herunter gefallen ist.

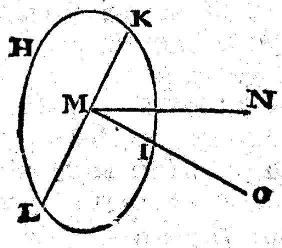
Anmerkung IV. Anstatt des einfachen Gewichtes der bewußten Säule des Flüssigen, nehmen viele das doppelte zum Maaße des Widerstandes oder Stoßes an. Newton ist für das einfache Gewicht, und führet Versuche an; Bossüt ist für das doppelte, und berufet sich ebenfalls auf seine Versuche. Beide können Recht haben. Newtons Versuche waren so eingerichtet, daß das Wasser hinter dem festen Körper sich leicht wieder schließen konnte; hingegen bei Bossüts Versuchen fiel das Wasser auf eine horizontale Platte, die an einer Wage hing; folglich blieb der Raum unterhalb der gestoßenen Fläche wasserleer, welches einen großen Unterschied machet. Der gewöhnlichste Fall ist, daß hinter dem gestoßenen Körper kein leerer Raum bleibet, und für diesen Fall scheinet das einfache Gewicht zu gelten. Jedoch muß man nicht vergessen, daß auch der andere Fall eintreten, und das Maaß des Widerstandes verändern kann. Sogar bei Bewegungen in der Luft kann er Statt finden, wenn der in derselben bewegte feste Körper mit einer sehr großen Schnelligkeit gehet.

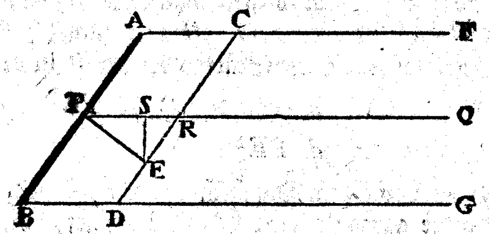
§. 7.

Lehrsatz.

Wenn die Richtung der Bewegung entweder des festen Körpers, oder der Flüssigkeit, gegen die gestoßene Fläche nicht senkrecht ist, so verhält sich

sich, zufolge der (§. 1, Zus. II) angenommenen Hypothese, die Kraft des geraden Stoßes zur Kraft des schiefen Stoßes (gegen eine und dieselbige Fläche), wie das Quadrat des Halbmessers zum Quadrate des Kosinus des Einfalls-Winkels.





Es sei eine ebene Fläche, die sich, indem sie immer mit sich selbst parallel bleibet, in einer flüssigen Materie beweget, aber so daß die Richtungslinie nicht auf der Ebne senkrecht sei, so muß vor allen Dingen der Einfalls-Winkel bestimmet werden. Es sei HI die ebene Fläche. Man nehme in ihr den willkührlichen Punkt M, und ziehe MN in der Richtung der Bewegung. Durch MN stelle man sich eine andere Ebne auf HI senkrecht vor. Gesetzt es sei KL der gemeinsame Durchschnitt beider Ebnen, so ist NMK der Winkel, den die Ebne mit der Richtung der

Bewegung machet, und wenn man MO auf HI senkrecht errichtet, so ist NMO der Einfalls-Winkel. Er ist das Komplement des Winkels NMK.

Es sei nun AB eine solche Durchschnittslinie, wie vorher KL war, man gebe ihr in Gedanken eine unendlich kleine Breite, und es sei AF oder BG oder PQ die Richtung der Bewegung. Gesetzt, nach der Einheit der Zeit sei AB in die Lage CD gekommen, so ist AC oder BD oder PR die absolute Geschwindigkeit.

Fälle PE senkrecht auf CD, so ist PE die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich AB jedem Wassertheilchen nähert, und nach dieser relativen Geschwindigkeit richtet sich die Stärke des Stoßes (§. 3 und 4). Ferner beträgt das Volumen der verdrängten Flüssigkeit AB $\times$ PE, und die Masse AB $\times$ PE $\times$ d, wenn d die Dichtigkeit der Flüssigkeit ist. Multipliziret man diese Masse mit der relativen Geschwindigkeit, so bekömmt man die Stärke des schiefen Stoßes. Diese Stärke oder Kraft ist demnach

$$(AB \times PE \times d) \times PE$$

oder $AB.\ d.\ PE^2$

Und da dieses von jedem Durchschnitte wie AB gilt, so ist, wenn man die ganze stoßende Fläche s nennet, die Kraft des Stoßes

$$s.\ d.\ PE^2.$$

Es sei ferner v = PR die absolute Geschwindigkeit, und es sei ϕ = RPE der Einfalls-Winkel, so ist

$$PE = PR.\ \text{Cosin.}\ \phi = v.\ \text{cosin.}\ \phi$$

Wenn also r' die Wirkung des schiefen Stoßes vorstellet, so ist

$$r' = s.\ d.\ v^2.\ \text{cos.}\ \phi^2$$

Die Wirkung des geraden Stoßes war (§. 1)

$$r = s.\ d.\ v^2$$

Also

Also ist $r : r' :: 1 : \text{Cos.}\, \varphi^2$

$$r : r' :: 1^2 : \text{Cos.}\, \varphi^2$$

welches den Lehrsatz beweiset.

Wenn die Flüssigkeit elastisch ist, so ist der Beweis der nämliche, ausgenommen, daß allenthalben $2\,sd$ anstatt sd zu stehen kömmt (§. 2).

Und da in allen Fällen die Stärke des Stoßes noch durch den Faktor a, den die Erfahrung bestimmet, verbessert werden muß (§. 1, Zus. II und §. 2, Zus. I), so ändert auch dieser Faktor die Verhältnisse und unseren Lehrsatz nicht, wenn man nur annimmt, daß dieser Faktor sowohl für den geraden, als für jeden schiefen Stoß unverändert bleibet.

Der Beweis ist zwar nur für den Fall eingerichtet, wo sich die stoßende Fläche beweget, und das Flüssige in Ruhe ist, jedoch gilt er ebenfalls für den Fall, wo sich das Flüssige in der Richtung QP und mit der Geschwindigkeit RP gegen die ruhende Fläche AB beweget.

Zusatz. I. Aus dem Verhältnisse

$$r : r' :: 1 : \text{Cos.}\, \varphi^2$$

folget $r' = r.\text{Cos.}\, \varphi^2$

Es werde nun ein anderer Einfalls-Winkel φ' angenommen, und für diesen sei der Widerstand oder Stoß $= r''$, so ist ebenfalls

$$r'' = r.\ \text{Cos.}\, \varphi'^2$$

also ist $r' : r'' :: \text{Cos.}\, \varphi^2 : \text{Cos.}\, \varphi'^2$

das heißt, die Widerstände oder Stöße verhalten sich (bei gleichen Flächen und Dichtigkeiten) wie die quadrirten Kosinusse der Einfalls-Winkel. Also, je größer der Einfalls Winkel ist, oder je schiefer der Stoß ist, desto kleiner ist seine Wirkung, welches auch sonst leicht einzusehen ist.

Zusatz II. Obgleich der Stoß, wovon die Rede ist, gegen die gestoßene Ebne schief ist, insofern die Richtung der Bewegung mit der Ebne einen schiefen Winkel machet, so ist doch die Wirkung dieses Stoßes gegen die Ebne senkrecht, nämlich sie geschiehet in der Richtung PE, und der Erfolg davon ist, daß die Ebne AB gereizet wird, sich in dieser Richtung zurück zu bewegen. Will man die Wirkung in der Richtung der Bewegung selbst haben, so sei diese ϱ. Man fälle ES senkrecht auf PQ, so ist

$$r' : \varrho :: PE : SP$$

oder $$r' : \varrho :: 1 : \text{Cos.}\,\varphi$$

daher $$\varrho = r'\ \text{Cos.}\,\varphi$$

und da $$r' = s.\ d.\ v^2.\ \text{Cos.}\,\varphi^2$$

so ist $$\varrho = s.\ d.\ v^2.\ \text{Cos.}\,\varphi^3$$

und wenn sonst alles einerlei ist, so verhalten sich die schiefen Stöße, wenn man ihre Wirkungen in der Richtung der Bewegung betrachtet, wie die Würfel der Kosinusse der Einfalls-Winkel.

Anmerkung I. So lange die Einfalls-Winkel klein sind, und also die Richtungen nicht viel von der senkrechten abweichen, so treffen die Verhältnisse des Lehrsatzes und der Zusätze noch ziemlich ein. Bei großen Einfalls-Winkeln aber weichen die gefundenen Regeln sehr merklich von der Erfahrung ab. Es scheinet also, daß die Größe a, welche (siehe den Beweis gegen das Ende des Lehrsatzes) als beständig vorausgesetzet worden, und welche es auch bei senkrechtem Stoße ist (§. 1, Zus. II), sich mit dem Einfalls-Winkel verändert; nach welchem Gesetze aber, ist bisher unbekannt. Vielleicht ändert sich aber auch dieses a etwas mit der Größe der stoßenden oder gestoßenen Fläche, vielleicht auch mit der Dichtigkeit des Flüssigen.

Man

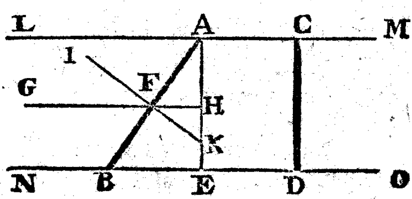
Man kann also die Verhältnisse dieses Lehrsatzes und seines Zusatzes bei kleinen Einfalls-Winkeln, ohne merklichen Irrthum gebrauchen, aber nicht bei großen Einfalls-Winkeln.

Anmerkung II. Einige Schriftsteller nennen den Winkel QPA, welchen die Fläche AB, mit der Richtung PQ machet, den Einfalls-Winkel. Dieses ist aber dem mathematischen Sprachgebrauche zuwider, so wie er auch in anderen Wissenschaften, z. E. in der Optik eingeführet ist. Der wahre Einfall-Winkel ist QPE, und QPA ist eigentlich der Neigungs-Winkel. Dieser ist das Komplement des Einfalls-Winkels, und der Kosinus des letzteren ist der Sinus des ersteren. Wollte man also den Neigungs-Winkel gebrauchen, so müßte allenthalben der Sinus anstatt des Kosinus gesetzet werden.

§. 8.

Lehrsatz.

Wenn zwei Ebnen zugleich von einer Flüssigkeit gestoßen werden, die eine in schiefer Richtung, die andere senkrecht, und wenn beide Ebnen durch dieselbigen parallelen Linien begränzet werden, so verhält sich (zufolge der angenommenen Voraussetzungen) der senkrechte Stoß zum schiefen, wie der Halbmesser zum Kosinus des Einfalls-Winkels.



Es sei GH oder LM oder NO die Richtung der Bewegung. Es sei AB die schiefe Ebne, und CD die senkrechte, welche beide durch die nämlichen Parallelen begränzet sind. (Die Ebnen werden hier, wie bei §. 7 durch bloße Linien vorgestellet.) Versetze CD in AE, mit sich selbst parallel. Ziehe IK senkrecht auf AB, so ist $\varphi = \angle$ GFI $= \angle$ KFH $= \angle$ BAE, der Einfalls-Winkel. Es sei d die Dichtigkeit der Flüssigkeit, r' der Stoß gegen AB, r'' der Stoß gegen CD oder AE, und v die absolute Geschwindigkeit, so ist

$$r' = \text{AB}.\ d.\ v^2\ \text{Cof.}\ \varphi^2 \quad (\S.\ 7)$$
$$r'' = \text{AE}.\ d.\ v^2 \quad (\S.\ 1)$$

Es ist aber AE $=$ AB. Cof. BAE $=$ AB. Cof. φ.

$$\text{also } r'' = \text{AB}.\ \text{Cof.}\ \varphi.\ d.\ v^2$$

folglich

$$r' : r'' :: \text{AB}.\ d.\ v^2.\ \text{Cof.}\ \varphi^2 : \text{AB}.\ d.\ v^2.\ \text{Cot.}\ \varphi$$
$$r' : r'' :: \text{Cof.}\ \varphi : 1.$$

oder $r'' : r' :: 1 : \text{Cof.}\ \varphi$

welches unser Lehrsatz ist. Wenn auch noch, wegen der Elastizität der Faktor 2 (§. 2) hinzukömmt, so werden dadurch die Verhältnisse nicht geändert. Und wenn, wegen der Abweichung der Theorie von der Erfahrung, noch der Faktor a hinzukömmt (§. 1, Zus. II, und §. 2, Zus. I), so ändert auch dieses die Verhältnisse nicht.

Zusatz I. In dem Falle des Lehrsatzes, verhalten sich die Stöße umgekehrt, wie die Größen der Ebnen. Denn es ist

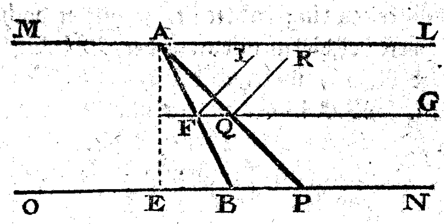
$$r' : r'' :: \text{Cof.}\ \varphi : 1 :: \text{AE} : \text{AB}$$

Da diese Proporzion von allen Durchschnitten wie AB und AE oder CD gilt, so gilt sie von den ganzen Ebnen. Obgleich also die schiefe Ebne größer ist, so empfängt sie doch den kleinsten Stoß.

Zusatz II. Wenn zwei oder mehrere Ebnen auf verschiedene Arten geneiget, aber alle durch dieselbigen Parallelen begränzet sind, so verhalten sich die Stöße wie die

Kosinusse

Kosinusse der Einfalls-Winkel, oder wie die Kosinusse der Winkel, welche die Ebnen mit einer anderen machen, gegen welche die Bewegung senkrecht ist, oder auch umgekehrt, wie die Längen der Ebnen.



Es seien die Ebnen AP, AB zwischen den Parallelen LM, NO enthalten, welche zugleich, so wie GF die Richtung der Bewegung vorstellen. Es sei der Einfalls-Winkel GFI $= \varphi'$ ($= \angle$ BAE) und der Einfalls-Winkel GQR $= \varphi$ ($= \angle$ PAE). Es sei r' der Stoß gegen AB, r''' gegen AP, und r'' gegen die senkrechte Ebne AE, so ist

$$r' : r'' :: \text{Cos.}\, \varphi : 1$$
$$r''' : r'' :: \text{Cos.}\, \varphi' : 1$$
$$\text{oder } r' = r''.\ \text{Cos.}\, \varphi$$
$$\text{und } r''' = r''.\ \text{Cos.}\, \varphi'$$
$$\text{also } r' : r''' :: \text{Cos.}\, \varphi : \text{Cos.}\, \varphi'$$

welches das gerade Verhältniß der Kosinusse beweiset. Ferner, da

$$AE = AB.\ \text{Cos.}\, \varphi$$
$$\text{und } AE = AP.\ \text{Cos.}\, \varphi'$$
$$\text{so ist } AB.\ \text{Cos.}\, \varphi = AP.\ \text{Cos.}\, \varphi'$$
$$\text{also Cos.}\, \varphi : \text{Cos.}\, \varphi' :: AP : AB$$
$$\text{und folglich } r' : r''' :: AP : AB$$

welches das umgekehrte Verhältniß der Ebnen beweiset.

Je schiefer und je länger also die Ebne ist, desto schwächer ist der Stoß.

Zusatz III. Was vom Stoße gilt, gilt auch vom Widerstande (§. 3). Obgleich der Beweis nur für unelastische Flüssigkeiten eingerichtet ist, so gilt er doch auch für elastische, weil bei diesen nur noch der beständige Faktor 2 hinzukömmt (§. 2), wodurch die Verhältnisse nicht geändert werden. Was in der angenommenen Hypothese der plötzlichen Vernichtung der Theilchen gilt, das gilt auch, wenn noch der durch die Erfahrung zu bestimmende Faktor a (§. 1, Zus. II, und §. 2, Zus. I) hinzukömmt, wenn nur dieser Faktor beständig ist. Da es aber wahrscheinlich ist, daß er sich mit dem Winkel ϕ verändere (§. 7 Anmerk. I), so kann man dem gegenwärtigen Lehrsatze und seinen Folgerungen nicht anders trauen, als bei kleinen Einfalls-Winkeln, oder bei solchen Bewegungen, die von der senkrechten wenig abweichen, weil alsdann der Faktor a noch ziemlich unverändert ist.

Zusatz IV. In dem gegenwärtigen Lehrsatze und seinen Zusätzen ist die Rede von der vollen Wirkung des schiefen Stoßes, welche in der Richtung IK (S. 103) geschiehet, und die Ebne AB reizet sich in dieser Richtung zu bewegen. Wenn man aber die Wirkung des Stoßes in der Richtung der Bewegung selbst nimmt, und sie ϱ nennet, so ist (§. 7, Zus. II)

$$\varrho = AB. d. v^2. Cos. \phi^3$$

Hingegen ist die senkrechte Wirkung auf CD oder AE

$$r = AE. d. v^2$$

Folglich

$$r : \varrho :: AE. d. v^2 : AB. d. v^2. Cos. \phi^3$$

$$r : \varrho :: AE : AB. Cos. \phi^3.$$

Es

Es ist ferner AE = AB. Cos. ϕ, also

$$r : \varrho :: \text{AB. Cos. } \phi : \text{AB. Cos. } \phi^3$$

$$r : \varrho :: 1 : \text{Cos. } \phi^2$$

$$\varrho = r. \text{Cos. } \phi^2$$

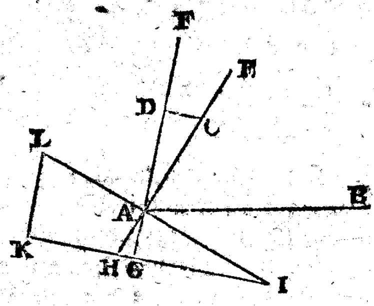
Folglich verhält sich die senkrechte Wirkung auf eine beliebige ebne Fläche, zur Wirkung in der Richtung der Bewegung gegen eine schiefe Fläche, die zwischen denselbigen Parallelen enthalten ist, wie das Quadrat des Halbmessers zum Quadrate des Kosinus des Einfalls-Winkels, oder auch des Winkels, den beide Flächen mit einander machen, das heißt, eben so wie die Kraft des geraden Stoßes zur Kraft des schiefen Stoßes (§. 7)

§. 9.

Lehrsatz.

Wenn man die Wirkung des Stoßes oder Widerstandes gegen eine ebene Fläche in einer beliebigen Richtung wissen will, so darf man sich nur eine andere Fläche vorstellen, die gegen diese Richtung senkrecht und mit der gegebenen zwischen denselbigen Parallelen eingeschlossen ist. Wenn man den senkrechten Stoß gegen diese eingebildete Ebne mit dem quadrirten Kosinus des Einfalls-Winkels multipliziret, so bekömmt man die verlangte Wirkung.

Es sei IL (folg. Fig.) die gegebene Fläche, und AB die Richtung der Bewegung. Es sei FG die Richtung, in welcher die Wirkung des Stoßes oder Widerstandes verlanget wird. Lege die Ebne IK gegen FG senkrecht, und begränze sie durch solche gerade Linien, die, wie LK mit FG parallel seien, und zugleich die Ebne IL einschließen. Errichte AE auf IL senkrecht, und verlängere sie



sie bis H, so ist $\phi = \angle$ EAB = der Einfalls-Winkel. Es beträgt die Wirkung in der Richtung EA (§. 7)

$$r' = \text{IL}.\ d.\ v^2.\ \text{Cos}.\ \phi^2$$

Es sei der Winkel FAF = ξ. Nimm in der AE den beliebigen Punkt C, und fälle CD senkrecht auf AF, benenne mit ϱ die verlangte Wirkung, so ist

$$r' : \varrho :: \text{AC} : \text{AD}$$

$$r' : \varrho :: 1 : \text{Cos}.\ \xi$$

$$\varrho = r'.\ \text{Cos}.\ \xi$$

$$\varrho = \text{IL}.\ d.\ v^2.\ \text{Cos}.\ \phi^2.\ \text{Cos}.\ \xi$$

Die senkrechte Wirkung ϱ' gegen IK würde betragen

$$\varrho' = \text{IK}.\ d.\ v^2.$$

Also $\varrho' : \varrho :: \text{IK}.\ d.\ v^2 : \text{IL}.\ d.\ v^2.\ \text{Cos}.\ \phi^2.\ \text{Cos}.\ \xi$

Nun ist IK = IL. Cos. LIK = IL. Cos. GAH = IL. Cos. CAD = IL. Cos. ξ,

also

$$\varrho' : \varrho :: \text{IL}.\ \text{Cos}.\ \xi,\ d.\ v^2 : \text{IL}.\ d.\ v^2.\ \text{Cos}.\ \phi^2.\ \text{Cos}.\ \xi$$

$$\varrho' : \varrho :: 1 : \text{Cos}.\ \phi^2$$

$$\varrho = \varrho'.\ \text{Cos}.\ \phi^2$$

welches unser Lehrsatz ist.

An-

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze kann auch dasjenige hergeleitet werden, was oben (§. 8, Zus. IV) schon auf eine andere Art bewiesen worden.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper sich in einer flüssigen Materie beweget, oder von der flüssigen Materie gestoßen wird, so leidet nur die Vorderfläche den Widerstand oder den Druck.

Denn nur die Vorderfläche ist der Bewegung des Flüssigen entgegengesetzet, oder das Flüssige ist nur der Bewegung der Vorderfläche entgegengesetzet.

Anmerkung. Ein Körper der sich in einer Flüssigkeit beweget, oder der sich in einer bewegten Flüssigkeit befindet, leidet eigentlich einen doppelten Druck, nämlich einen hydrostatischen und einen hydrodynamischen. Der hydrostatische hänget ab von der Größe der Oberfläche des Körpers, von der Dichtigkeit der Flüssigkeit, und von der Tiefe der Lage des Körpers unterhalb der obersten Fläche des Flüssigen; hierbei wird vorausgesetzet, daß das Flüssige schwer sei. Dieser Druck hebt sich selbst auf, was die horizontale Richtung betrift, und wirket nur in vertikaler Richtung, wenigstens so lange der Körper ganz mit dem Flüssigen umgeben ist. Beweget sich aber der Körper so geschwind, daß ein leerer Platz hinter ihm bleibe, so wirket der hydrostatische Druck nur gegen die eine Seite, und wird durch keinen Gegendruck aufgehoben; und in diesem Falle ist der hydrostatische Druck ein wirklicher Widerstand gegen die Bewegung.

Der hydrodynamische Druck hänget ab von der Größe der Vorderfläche, von der Dichtigkeit des Flüssigen, und vom

vom Quadrate der Geschwindigkeit (§. 1). Dieser wird meistens allein betrachtet. Es wird also gewöhnlich angenommen, daß die Bewegung langsam genug sei, um daß das Flüssige sich hinter dem Körper schließen könne, so daß der hydrostatische Druck, wenigstens in horizontaler Richtung aufgehoben werde. Indessen giebt es doch Fälle, wo beide Drücke zugleich wirken, wie schon oben (§. 6, Anm. II) erinnert worden, und es ist wenigstens gut, von der Möglichkeit solcher Fälle unterrichtet zu sein, nm bei vorkommender Gelegenheit darauf zu merken. Die nämliche Bemerkung gilt auch für den Fall, wo das Flüssige gegen einen ruhenden festen Körper stößt. Wenn das Flüssige sehr geschwinde gehet, so bleibet vor dem festen Körper ein leerer Raum.

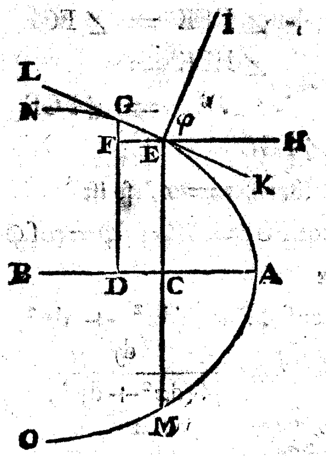
§. 11.

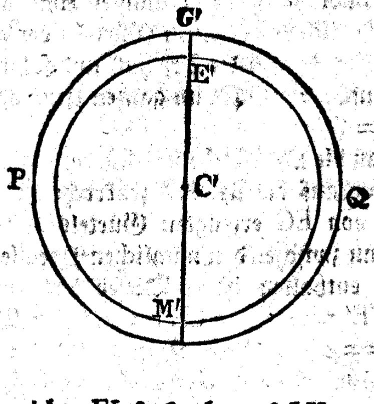
Aufgabe.

Es soll die Kraft des Widerstandes oder Stoßes einer Flüssigkeit gegen einen runden oder gedreheten Körper bestimmet werden, wenn die Bewegung in der Richtung seiner Axe geschiehet.

Es sei NAO (folg. Fig.) der Durchschnitt eines gedreheten Körpers durch seine Axe, das ist, eines solchen, dessen Oberfläche durch die Umdrehung der krummen Linie NAO um ihre Axe AB herum entstanden sei. Es wirke die Flüssigkeit in der Richtung der Axe AB. Ziehe eine willkührliche Applikate EC, und verlängere sie nach M. Unendlich nahe an derselben, weiter vom Scheitel A sei eine andere Applikate GD. Durch G und E ziehe die gerade LK, so ist sie die Tangente für den Punkt E. Durch E ziehe FEH mit AB parallel, so ist HE die Richtung der Kraft, die auf dem Punkt E wirket. Wenn die Abzissen mit x und die Applikaten mit y bezeichnet werden, so ist $EF\ (= CD) = dx$, $FG = dy$

In





In E errichte EI senkrecht auf LK, so ist $\angle$ IEH ($=\varphi$), der Einfalls-Winkel. Nun ist

$$\angle IEH + \angle HEK = 90^g$$

$$\angle FGE + \angle FEG = 90^g$$

also

$$\text{also } \angle IEH + \angle HEK = \angle FGE + \angle FEG$$
$$\text{und da } \angle HEK = \ldots \angle FEG$$
$$\text{so ist } \angle IEH \ldots = \angle FGE$$
$$\text{oder } \varphi = \angle FGE$$

und wenn der Halbmesser $= 1$, so ist

$$dy = GF = GE . \cos FGE = GE . \cos \varphi = \cos \varphi . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

mit einem Worte

$$dy = \cos \varphi . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$
$$\text{oder } \cos \varphi = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$
$$\cos^2 \varphi = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

Bei der Umdrehung der krummen Linie um ihre Axe erzeuget das Theilchen EG einen Gürtel, der allenthalben dieselbige Neigung gegen die Axe hat, und folglich ist beim Stoße der Einfalls-Winkel im ganzen Umfange des Gürtels $\angle HEI = \varphi$.

Wenn man die Oberfläche des Körpers auf einer Ebne projektiret, worauf die Axe AB senkrecht ist, so ist der Entwurf des von EG erzeugten Gürtels ein Ring PQ, welcher alsdann zwischen den nämlichen Parallelen wie der Gürtel selbst enthalten ist. Dieser hat zum kleinsten Halbmesser $C'E' = DF = CE = y$, zum Durchmesser $M'E' = ME = 2y$, und zur Breite $E'G' = FG = dy$. Der größte Halbmesser ist $C'G' = DG = y + dy$. Indessen, da dy in Vergleich mit y so viel als nichts beträgt, so kann man y als den gemeinsamen Halbmesser, und $2y$ als den gemeinsamen Durchmesser betrachten. Es verhalte sich der Durchmesser zum Umkreise, wie 1 zu π, so ist der innere Umkreis $2y . \pi$ oder $2\pi y$, und da die Breite des Ringes dy beträgt, so ist seine Fläche $= 2\pi y dy$.

Der

Der senkrechte Stoß oder Widerstand gegen solchen Ring würde betragen (§. 1)

$$(2\pi y dy).\ d.\ v^2$$

Multipliziret man noch mit dem Quadrate des Kosinus des Einfalls-Winkels und erinnert man sich, daß, wie kurz vorher bewiesen worden $\cos.^2\phi = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2}$, so kömmt

$$2\pi\ dv^2 . \frac{y dy^3}{dx^2 + dy^2}$$

und dieses ist die Wirkung des Flüssigen auf den von EG erzeugten Gürtel, wenn man diese Wirkung in der Richtung der Axe schätzet. Nun bleibet zwar noch ein anderer Theil der Wirkung übrig, der auf die Axe senkrecht ist, hingegen hebt dieser sich von selbst auf, indem er auf jeden Theil des Gürtels so stark ist, als auf dem entgegengesetzten.

Es sei also E die Wirkung des Flüssigen auf den Theil EAM des Körpers (nicht der bloßen Linie). Nimmt dieser Theil zu um den von EG erzeugten Gürtel, so nimmt die Wirkung zu um die eben jetzt berechnete Quantität. Es ist demnach

$$dE = 2\pi dv^2\ \frac{y.\ dy^3}{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{und } E = 2\pi dv^2 \int \frac{y dy^3}{dx^2 + dy^2} = 2\pi dv^2 \int \frac{y dy}{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$$

indem hier nicht nur 2π, sondern auch d und v unverändert bleiben.

Wir haben demnach eine Formel zur allgemeinen Auflösung der Aufgabe.

Zusatz. Es sei die krumme Linie NAO ein Zirkel, so ist der Körper eine Kugel. In diesem Falle ist, wenn der Zirkel a zum Durchmesser hat

$$y^2 = ax - x^2$$

$$2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx = (a - 2x)\,dx$$

$$y\,dy = \tfrac{1}{2}(a - 2x)\,dx$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a - 2x}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4y^2}{(a-2x)^2} = \frac{4(ax - x^2)}{(a - 2x)^2}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} + 1 = \frac{4(ax - x^2)}{(a - 2x)^2} + 1$$

$$= \frac{4(ax - x^2) + (a - 2x)^2}{(a - 2x)^2}$$

$$= \frac{a^2}{(a - 2x)^2}$$

$$\frac{y\,dy}{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)} = \frac{\frac{1}{2}(a - 2x)^3\,dx}{a^2}$$

$$= \frac{(a - 2x)^3\,dx}{2a^2}$$

$$= \frac{(a - 2x)^3 .\, d(a - 2x)}{-4a^2}$$

Hiervon ist das Integrale:

$$- \frac{(a - 2x)^4}{16^2 a^2}$$

Also

$$E = 2\pi dv^2 \int \frac{y\,dy}{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)} = -\frac{\pi dv^2 (a-2x)^4}{8a^2} + C$$

Die beständige Größe C wird durch den Umstand bestimmet, daß $E = 0$, wenn $x = 0$, also

$$0 = -\frac{\pi dv^2\ (2x)^4}{8a^2} + C$$

$$0 = -\frac{\pi dv^2 . 16x^4}{8a^2} + C$$

$$C = \pi dv^2\ \frac{16x^4}{8a^2}$$

folglich $E = \frac{\pi dv^2}{8a^2}[16x^4 - (a-2x)^4]$

Da nun bloß die vordere Hälfte der Kugel den Stoß oder Widerstand leidet, so muß man setzen $x = \frac{1}{2}a$, dann kömmt

$$E = \frac{\pi dv^2}{8a^2}[16(\tfrac{1}{2}a)^4 - (a-a)^4]$$

$$E = \frac{\pi dv^2 . 2(\frac{1}{2}a)^4}{a^2} = \frac{\pi dv^2 . 2 . \frac{1}{16} . a^4}{a^2}$$

$$E = \frac{\pi dv^2 a^2}{8}$$

Laßt uns diese Größe mit dem Widerstande oder Stoße vergleichen, den der größte Durchschnitt der Kugel bei einer senkrechten Bewegung leiden würde. Die Fläche dieses Durchschnittes beträgt $\frac{1}{4}a^2\pi$, also beträgt der Stoß oder Widerstand $\frac{1}{4}a^2\pi dv^2$ oder

$$\frac{\pi dv^2 a^2}{4}$$

welches doppelt so viel ist als E. Also leidet die Kugel einen Widerstand oder Stoß, der nur halb so viel beträgt, als derjenige den der große Zirkel der Kugel leiden würde.

Anmerkung. Herr Ritter von Borda hat durch Versuche im Wasser gefunden, daß der Widerstand gegen die Kugel nicht die Hälfte, sondern ohngefähr $\frac{2}{5}$ des Widerstandes gegen den größten Zirkel der Kugel ist. Indessen pflegen doch die Rechnungen, die man nach der Voraussetzung, daß jener Widerstand die Hälfte von diesem ist, machet, ziemlich mit der Erfahrung zu stimmen. Dieser Umstand scheinet des Herrn von Borda's Versuche etwas verdächtig zu machen. Er machte sie in einem runden Gefäße, und die Kugel ging auch rund herum. Auf diese Art mußte das Wasser nothwendig eine drehende Bewegung bekommen, wodurch die Erfolge vermuthlich anders ausgefallen sind, als in einer ruhenden Flüssigkeit geschehen wäre.

§. 12.

Wenn eine flüssige Materie gegen eine Fläche stößt, so giebt es allemal einen gewissen Punkt in der Fläche, welcher unterstützet werden muß, wenn die gestoßene Fläche in Gleichgewicht bleiben soll. Denn der Stoß der Flüssigkeit entstehet aus den Stößen aller ihrer Theilchen. Diese wirken als Kräfte in parallelen Richtungen gegen die Fläche, und es ist aus der Dynamik bekannt, daß allemal ein Punkt in der Fläche existiret, durch welchen die aus solchen einzelnen Kräfte zusammengesetzte Kraft ihre Richtung hat, und daß, wenn dieser Punkt hinlänglich unterstützet wird, die ganze Fläche in Gleichgewicht bleibet. Diesen Punkt können wir in der gegenwärtigen Untersuchung den Druckpunkt (centre d'impression) nennen. Es findet auch ein solcher Punkt Statt, wenn die Fläche bloß durch eine unbewegte schwere

Flüssig-

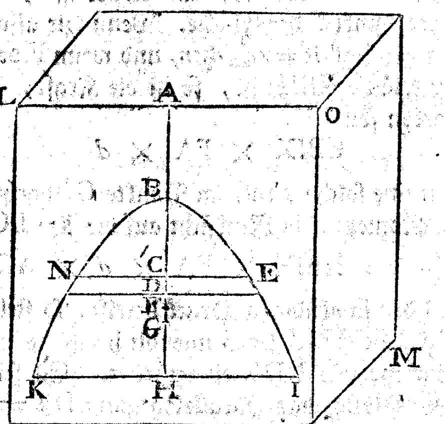
Flüssigkeit gedrücket wird. In diesem letzten Falle gehört die Bestimmung des Druckpunktes eigentlich zur Hydrostatik. Indessen da beide Fälle viel Aehnlichkeit haben, so wollen wir sie hier nach einander betrachten, und mit dem hydrostatischen Druckpunkte den Anfang machen. Jedoch, da die Druckpunkte von keinem erheblichen Nutzen sind, so werden wir uns nicht viel dabei aufhalten.

§. 131.

Aufgabe.

Wenn eine ebne Fläche von einer ruhenden homogenen Flüssigkeit gedrücket wird, so soll der Druckpunkt bestimmet werden. (Siehe die folgende Figur.)

Es sei das Gefäß LM ganz bis oben mit einer flüssigen Materie angefüllet, und in einer vertikalen Wand desselben sei eine Oefnung KBI, die sich durch eine lothrechte Linie AH in zwei ähnlich-gleiche Theile zerlegen läßt.



In diese Oefnung sei ein Brett genau eingepaßt, so wird der Punkt G verlanget, gegen welchen von aussen eine Stütze angebracht werden muß, um daß das eingepaßte Brett in Gleichgewicht bleibe; so daß kein Theil desselben eher als ein anderer hinausgetrieben werden könne. In diesem Falle ist der verlangte Punkt G der hydrostatische Druckpunkt.

Man stelle sich vor, das Brett KBI sei vermittelst der steifen Linie BA mit der Axe LO verbunden, es werde inwendig durch das Wasser gedrücket, auswendig aber durch eine Kraft, die jenem Drucke gleich sei, und es werde der Punkt G verlanget, wo diese Kraft angebracht werden muß, um daß das Brett, ohne Anstrengung der Axe in Gleichgewicht bleibe. So muß das Moment des inwendigen Druckes dem Momente der auswendigen Axe in Betreff der Axe LO gleich sein.

Es ist aus der Hydrostatik bekannt, daß die Summe aller einzelnen Drücke gegen eine Fläche KBI so viel beträgt, als das Gewicht einer Säule des Flüssigen, deren Grundfläche so groß ist, als die gedrückte Fläche, und deren Höhe so viel beträgt, als die Wasserhöhe BF über den Schwerpunkt F der Fläche. Wenn wir also die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= d$ setzen, und wenn F der Schwerpunkt der Fläche KBIK ist, so ist die Kraft, welche von aussen wirken soll

$$\mathrm{KBIK} \times \mathrm{FA} \times d$$

und wenn eine solche Kraft im Punkte G angebracht wird, so ist ihr Moment, in Rücksicht auf die Axe LO

$$\mathrm{KBIK} \times \mathrm{FA} \times d \times \mathrm{AG}$$

Was den inwendigen Druck betrift, so stelle man sich vor, die Fläche KBIK sei in unendlich viel horizontale Parallelogramme wie NDE eingetheilet. Es sei $BC = x$, $CE = y$, folglich das Parallelogramm $DE = ydx$, und $NDE = 2ydx$. Der Druck, den solches Elementar-

Paral-

Parallelogramm leidet, wird eben so bestimmet, wie vorher der Druck auf die ganze Fläche. Nämlich er beträgt

$$NDE \times AC \times d$$

indem der Punkt C, wegen der unendlich kleinen Höhe, für den Schwerpunkt gelten kann. Aus derselbigen Ursache kann auch der Punkt C für den Druckpunkt des kleinen Parallelogramms gelten, also ist AC die Entfernung von der Axe, und das Moment beträgt

$$NDE \times AC \times d \times AC$$

oder $NDE \times AC^2 \times d$

Es sei $AB = a$, so ist $AC = (a + x)$, also ist das Moment des Druckes gegen NDE

$$2ydx\ (a + x)^2 \times d$$

Dieses Moment ist die Zunahme des Moments des Drukkes gegen den Theil NBEN der Fläche. Es sei dieser Druck P, so ist folglich

$$dP = 2ydx\ (a + x)^2\ d$$

also $P = 2d\int y\ (a + x)^2\ dx + C$

die beständige Größe C wird durch die Bedingung bestimmet, daß $P = 0$ wenn $x = 0$, und das Moment des Druckes auf die ganze Fläche KBIK wird gefunden, wenn man setzet $x = BH$.

Nachdem P für die ganze Fläche gefunden worden, so darf man nur setzen

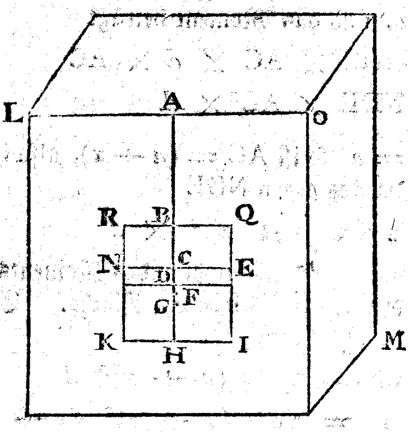
$$KBIK \times FA \times d \times AG = P$$

also $AG = \dfrac{P}{KBIK \times FA \times d}$

oder $AB + BG = \dfrac{P}{KBIK.\ (AB + BF) \times d}$

$$\text{oder } BG = \frac{P}{KBIK. \ (AB + BF) \times d} - AB$$

Der Faktor d im Nenner verschwindet allemal, weil er auch in der Größe P vorkömmt. Also kommt es hier auf die Dichtigkeit der Flüssigkeit gar nicht an.



Exempel. Es sei alles überhaupt wie in der Auflösung, und die Oefnung sei ein Parallelogramm RI, mit horizontalen und vertikalen Seiten. Es sei $RQ = b$, folglich $BQ = CE = y = \frac{1}{2} b$, also eine beständige Größe. So ist

$$P = 2d. \int \tfrac{1}{2} b \, (a + x)^2 \, dx + C$$

$$\text{oder } P = db. \int (a + x)^2 \, dx + C$$

$$P = db. \tfrac{1}{3} (a + x)^3 + C$$

und da $x = 0$, wenn $P = 0$, so ist $C = - db. \frac{1}{3} a^3$, folglich ist

$$P = \tfrac{1}{3} db \left[(a + x)^3 - a^3 \right]$$

Es

Es sei BH $= h$, so ist für das ganze Parallelogramm

$$P = \tfrac{1}{3} db\,[(a + h)^3 - a^3]$$

Diese Größe muß dividiret werden durch

$$KBIK\ (AB + BF) \times d$$

Nun ist KBIK $= bh$ und AB $+$ BF $= a + \frac{1}{2}h$, also

$$BG = \frac{\frac{1}{3} db\,[(a + h)^3 - a^3]}{bh.\,(a + \frac{1}{2}h).\,d} - a$$

$$BG = \frac{(a + h)^3 - a^3}{3h.\,(a + \frac{1}{2}h)} - a$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so findet man

$$BG = \frac{(3a + 2h)\,h}{6a + 3h}$$

Will man FG wissen, oder um wie viel der Druckpunkt unterhalb des Schwerpunktes lieget, so ist

$$FG = BG - BF = \frac{(3a + 2h)\,h}{6a + 3h} - \frac{h}{2}$$

$$= \left(\frac{3a + 2h}{6a + 3h} - \tfrac{1}{2}\right) h$$

$$= \left(\frac{3a + 2h - 3a - \frac{3}{2}h}{6a + 3h}\right) h$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}h}{6a + 3h}\right).\,h$$

$$= \frac{h^2}{12a + 6h}$$

$$= \frac{h^2}{6\,(2a + h)}$$

Dieser Unterschied FG wird um desto größer, je höher das Parallelogramm ist. Er ist am größten, wenn $a = 0$, das heißt, wenn das Parallelogramm bis an die Wasserfläche reichet. Dann bekömmt man

$$FG = \tfrac{1}{6} h$$

In allen übrigen Fällen ist FG kleiner. Wenn also keine große Genauigkeit verlanget wird, so kann man immer den Schwerpunkt F anstatt des Druckpunktes annehmen. Um sich noch mehr hiervon zu überzeugen, nehme man an, es sei $a = h$, das heißt, der obere Rand des Parallelogramms sei vom Wasserspiegel so weit, als vom unteren Rande entfernet. Dann wird nur

$$FG = \tfrac{1}{18} h.$$

Anmerkung. Es wären noch die Fälle zu betrachten, wo die Fläche nicht, wie im Beweise angenommen worden, lothrecht stehet, wo sie sich nicht in zwei ähnliche Hälften theilen läßt, wo sie nicht eben, sondern krumm ist. Indessen da man schon siehet, daß der Druckpunkt nie weit unter dem Schwerpunkte ist, so ist es nicht nöthig, sich in solche Untersuchungen einzulassen.

So wie wir oben (Hauptst. III, §. 4, Zus. V) den Schwerpunkt anstatt des Mittelpunktes der Geschwindigkeit gebrauchet haben, so können wir ihn auch hier, in den meisten Fällen, anstatt des Druckpunktes annehmen.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn eine ebne Fläche von einer homogenen bewegten Flüssigkeit gestoßen wird, deren Theilchen alle mit gleicher Geschwindigkeit gehen, so ist der Schwerpunkt zugleich der Mittelpunkt des Stoßes, oder der Druckpunkt

Denn

Denn in diesem Falle sind die unendlich kleinen Stöße der Flüssigkeit, gegen die Fläche eben so vertheilet, wie die Fallkraft, folglich ist auch die daraus entstandene Kraft eben so beschaffen, wie das Gewicht eines Körpers, und derselbige Punkt ist für beiderlei Kräfte der gemeinsame Ruhepunkt. Dieses gilt sowohl für den senkrechten, als auch für den schiesen Stoß. Denn bei diesem sind die einzelnen unendlich kleinen Stöße alle nach demselbigen Verhältnisse vermindert, und folglich bleiben sie einander gleich.

Zusatz I. Auch wenn eine Ebne sich, mit sich selbst parallel in einer ruhenden homogenen Flüssigkeit beweget, fällt der Mittelpunkt des Widerstandes, aus ganz ähnlichen Gründen, in dem Schwerpunkte der Ebne.

Zusatz II. Desgleichen, wenn eine Ebne sich, mit sich selbst parallel, in einer homogenen Flüssigkeit beweget, die in allen ihren Punkten einerlei Geswindigkeit hat, so fällt der Stoßpunkt in den Schwerpunkt, weil alsdann der Erfolg des Stoßes der nämliche ist, als wenn die Ebne ruhete und das Flüssige sich mit einer absoluten Geschwindigkeit bewegete, die der wirklichen relativen Geschwindigkeit gleich wäre.

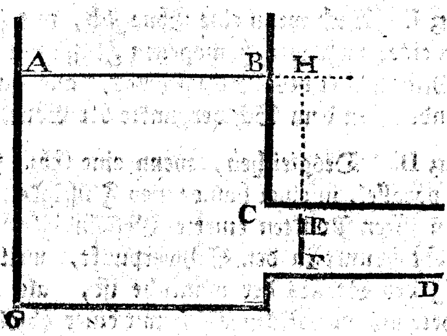
Zusatz III. Wenn alles wie im vorigen Zusatze bleibet; nur daß die gestoßene Ebne, sich nicht mit sich selbst parallel beweget, sondern durch den Stoß des Wassers gezwungen ist, sich um eine gewisse Axe zu drehen, so ist der Stoßpunkt nicht im Schwerpunkte, sondern etwas näher an der Axe, indem die Punkte, welche der Axe näher liegen, weniger geschwinde entfliehen, und folglich einen stärkeren Stoß bekommen. Indessen, wenn die Axe der Bewegung von der bewegten Fläche etwas entfernet ist, so kann man ohne merklichen Irrthum den Schwerpunkt anstatt des Stoßpunktes gebrauchen.

§. 15.

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn eine Flüssigkeit, die sich in horizontaler Richtung aus einer nicht zu großen Seiten-Oefnung eines Gefäßes ergießt, gegen eine unbewegte Ebne senkrecht anstößt, so ist der hydrodynamische Druckpunkt oder Stoßpunkt mit dem hydrostatischen Druckpunkte (§. 13) einerlei.



Es werde das Gefäß BG bis AB mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit, voll erhalten, und das Wasser fließe ab durch einen Kanal CD. In diesem stoße es an eine ebne Fläche EF, so pfleget man anzunehmen, daß die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen den zustimmenden Wasserhöhen entsprechen, nämlich daß die Geschwindigkeit in E der Höhe EH, in F aber der Höhe FH entspricht, woraus dann folget (§. 6), daß jedes Theilchen der Fläche einen Druck leidet, welcher so viel beträgt, als das Gewicht einer Wassersäule, die ein solches Theilchen zur Grundfläche und die zustimmende Wasserhöhe zur Höhe hat. Nun beträgt der hydrostatische Druck auf jedes Theilchen eben so viel. Folglich wirket der eine Druck wie der andere, folglich ist auch der Druckpunkt der nämliche.

Zusatz.

Zusatz. Auf diesen Lehrsatz kann man dennoch in der Ausübung nicht viel fußen. Denn 1) richtet sich bei ausströmenden Flüssigkeiten die Geschwindigkeit nicht genau nach der Wasserhöhe, es müßte denn die Oefnung sehr klein sein. 2) Wegen des Zusammenhanges der Wassertheilchen kann nicht jedes derselben seine eigenthümliche Geschwindigkeit behalten, die es haben würde, wenn es allein aus einer unendlich kleinen Oefnung ginge. 3) Ist die absolute Quantität des Druckes bei einer bewegten Flüssigkeit noch nicht auf eine ganz entschiedene Art bestimmet (§. 6, Anm. III). 4) Es ist schwer zu begreifen, daß das bewegte Wasser nicht mehr drücken sollte, als das ruhende.

Es wird also in der Praxis am besten sein, daß man annehme, das Wasser stoße gegen alle Theile der Fläche mit gleicher Geschwindigkeit, und dann fällt der Druckpunkt in den Schwerpunkt.

Fünftes Hauptstück.

Von der Bewegung des Wassers in Kanälen und in Flüssen.

§. 1.

Ein Kanal ist ein prismatisches oder beinahe prismatisches langes Gefäß, dessen Axe entweder horizontal, oder gegen den Horizont schief geneiget ist, und dessen obere Fläche mangelt, so daß das in einem solchen Gefäße fließende Wasser, nicht wie in Röhren allerseits eingesperret ist, sondern oberwärts von der Luft begränzet wird. Man kann kleine Kanäle von Holz oder einer anderen Materie machen. Große werden in der Erde gegraben, und meistens mit Steinen eingefaßt. Kleine und mittelmäßige Kanäle, die bei Mühlwerken und anderen Wassermaschinen angebracht werden, pfleget man **Gerinne** zu nennen.

§. 2.

Ein Fluß ist ein Wasser, welches in einer langen Vertiefung des Erdbodens fließt, welche Vertiefung das **Bett** des Flusses genannt wird. Kleinere Flüsse werden Ströme genannt, und noch kleinere Flüsse heißen Bäche. Das Wort **Bett** kann auch von dem Boden und den Wänden eines Kanals gebrauchet werden.

§. 3.

§. 3.

Da der merkwürdigste Umstand, welcher bei der Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen zu beobachten ist, in der Geschwindigkeit des Wassers bestehet, so ist man darauf bedacht gewesen, bequeme Mittel zu erfinden, wodurch diese Geschwindigkeit beobachtet werden könne. Wir wollen hier die vornehmsten anführen.

§. 4.

Wenn man ein Stück Holz, Kork oder einen anderen leichten Körper in ein fließendes Wasser wirft, so schwimmet es, und erhält nach kurzer Zeit die Geschwindigkeit des Wassers selbst. Denn das Wasser höret nicht eher auf, den festen Körper zu stoßen und auf denselben zu wirken, als wenn er so geschwinde gehet, als das Wasser selbst. Wenn man demnach die Geschwindigkeit eines solchen Körpers beobachtet, so erfährt man zugleich die Geschwindigkeit des Wassers. Es muß aber der schwimmende Körper schwer genug sein, oder genugsam beschweret werden, um daß er größtentheils ins Wasser getauchet sei, sonst könnte er durch die Bewegung der Luft in seiner eigenen Bewegung gestöret werden.

Um die Geschwindigkeit eines solchen schwimmenden Körpers zu beobachten, bemerket man gewisse Stellen am Ufer, misset ihren Abstand, zählet vermittelst einer guten Taschenuhr die Zeit-Sekunden, welche der schwimmende Körper gebrauchet, um von einer bemerkten Stelle zur anderen zu kommen, und schließt daraus den Weg, den er in einer Zeit-Sekunde zurückleget. Weil aber der schwimmende Körper nicht sogleich, nachdem er ins Wasser geworfen worden, die völlige Geschwindigkeit desselben annimmt, so muß man ihn an einem Orte hineinwerfen, der dem Ursprunge des Wassers etwas näher sei, als die bezeichneten Stellen, auf daß er, bei diesen, die Geschwindigschwindigkeit des Wassers schon erhalten habe, oder daß wenigstens der Unterschied unmerklich sei.

§. 5.

Man mache zwei Kugeln von Holz oder Wachs, u. s. w. Verbinde sie vermittelst eines Fadens, und beschwere die eine vermittelst eines Steines oder dergleichen, so daß die leichtere Kugel nahe unter dem Wasserspiegel schwimme, die andere aber tiefer im Wasser hänge. Durch dieses Mittel kann man untersuchen, ob das Wasser oben oder unten schneller fließt, je nachdem die obere oder untere Kugel vorausgehet und die andere zurück bleibet.

Durch dieses und andere Mittel hat man beobachtet, daß das Wasser oben in der Nähe des Wasserspiegels, und unten nahe am Grunde, langsamer zu fließen pfleget, als in einer mittleren Tiefe, zwischen diesen beiden Gränzen. Von der Ursache dieser Erscheinung wird weiter unten geredet werden, jedoch leidet sie verschiedene Ausnahmen, die von besonderen Umständen, und hauptsächlich von der Beschaffenheit des Bettes, abhängen.

§. 6.

Wenn man ein kleines und leichtes Rad, welches an seinem Umfange mit Schaufeln versehen ist, so eintauchet, daß das Wasser die Schaufeln fortstößt, so drehet es sich um seine Axe herum, und ein gewisser Punkt jeder Schaufel, der nicht weit vom Schwerpunkte lieget (H. IV, §. 14, Zus. III), bekömmt die Geschwindigkeit des Stromes. Zählet man demnach die Umwendungen während einer gewissen Zeit, und berechnet man den von einem der besagten Punkte in der Einheit der Zeit, beschriebenen zirkelförmigen Weg, so erhält man dadurch die Geschwindigkeit des Stromes.

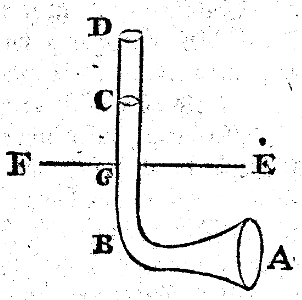
§ 7.

§. 7.

Castelli und Gugielmini haben folgendes Mittel vorgeschlagen. Man soll queer durch den Fluß eine Art von rechteckigtem Rahmen bauen, und das Bett so ausgraben oder ausfüllen, daß der Rahmen genau hinein passe. In dem Rahmen soll sich ein Schieber oder eine Art eines großen Schutzbrettes auf und nieder bewegen lassen. Nun soll man den Schieber oder das Schutzbrett herunter lassen, so daß unten nur eine Oefnung bleibe, die zwar so breit wie der ganze Rahmen sei, aber nur eine geringe Höhe habe. Durch diese Sperrung wird der Fluß ein wenig anschwellen; man merke am Rande des Rahmens, wie hoch er steiget. Bald aber wird er aufhören zu steigen, und der Wasserspiegel wird unverändert bleiben. Dann gehet das Wasser durch die Oefnung so schnell, daß in einer beliebigen Zeit eben so viel durchkömmt, als vorher durch den ganzen Durchschnitt des Flusses. Denn, wäre dieses nicht, so könnte das Wasser vor dem Schieber nicht seine Höhe behalten, sondern es müßte entweder noch steigen oder sinken. Nun meinen die Erfinder, wäre es ein leichtes die Geschwindigkeit des durch die Oefnung fließenden Wassers zu berechnen, indem sie ohngefähr der Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunkte der Oefnung entspricht (Hauptst. III, §. 4, Zus. V). Verringert man diese Geschwindigkeit so vielmal als der Durchschnitt des Flusses am Flächen-Inhalte die Oefnung übertrift, so hat man die Geschwindigkeit des Flusses (Hauptst. I, §. 21, Zus. I). Es ist aber nicht wahrscheinlich, daß die Geschwindigkeit des durch die Oefnung fließenden Wassers, sich hier bloß nach der Höhe des Wasserspiegels richte, indem das Wasser nicht ruhend ist, sondern von einem höheren Orte her einen Zufluß hat. Ferner findet hier eine Verengerung des durch die Oefnung fließenden Wassers (Hauptstück I, §. 5) statt, welche nicht aus der Acht gelassen werden müßte. Ueberdies wäre die ganze Anstalt auch gar zu mühsam und kostbar, hauptsächlich bei etwas großen Flüssen.

§. 8.

Herr Pitot gebrauchte eine gläserne Röhre ABD, welche in D rechtwinklicht gebogen war, in A aber hatte



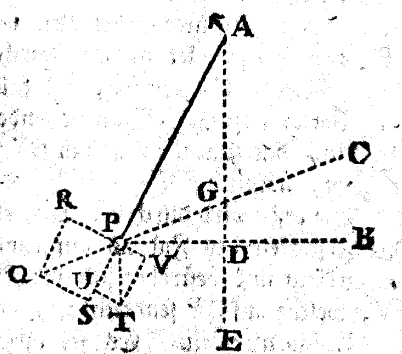
sie eine erweiterte Mündung, um den Druck des fließenden Wassers desto besser zu empfangen. Es wird dieses Instrument ins Wasser gestellet, so daß BD lothrecht, BA hingegen horizontal und der Richtung des Stromes gerade entgegengesetzet sei. Es sei EF der Wasserspiegel, so würde das Wasser, wenn es auch ruhig wäre, schon bis in G in der Röhre steigen. Nun aber drücket das fließende Wasser noch bei A vermöge seiner Bewegung, und treibet das in der Röhre befindliche bis in C hinauf. Die Säule CG wird demnach durch den Druck, welcher aus der Bewegung entstehet, in Gleichgewicht gehalten. Nun ist der Druck in A so groß, als das Gewicht einer Säule des Flüssigen, welche A zur Grundfläche aus die der Geschwindigkeit entsprechende Höhe hat (H. IV, §. 6). Dieser

Dieser Druck aber ist auch so groß, als der bis in A fortgepflanzte Druck der Säule CG, das heißt, so groß als der Druck einer Säule des Flüssigen, welche A zur Grundfläche und CG zur Höhe hat. Also ist CG die der Geschwindigkeit des Stromes entsprechende Höhe, das heißt, man bekömmt die Geschwindigkeit des Stromes, wenn man die Geschwindigkeit eines von C bis G herunter gefallenen Körpers berechnet.

Je nachdem man das Instrument mehr oder weniger eintauchet, so kann man die Geschwindigkeiten des Flusses in verschiedenen Tiefen untersuchen.

§. 9.

Eines der gebräuchlichsten Mittel, um die Geschwindigkeit eines fließenden Wassers zu erforschen, giebt das Pendel.



Es sei ein Faden irgendwo in A über dem Wasser befestiget, an dessen unterstem Ende hänge im Wasser eine Kugel von Elfenbein oder einer andern Materie, die nicht gar zu schwer, aber doch merklich schwerer als das Wasser

 sei.

sei. Ist die Materie der Kugel zu schwer, so weichet das Pendel nicht genug von der Vertikal-Linie ab, und der Unterschied der Winkel, die der Faden mit der Vertikal-Linie machet, ist nicht merklich genug. Ist sie zu leicht, so kann auch die größte Geschwindigkeit des Stromes die Kugel nicht weiter seitwärts treiben, als bis zur Oberfläche des Wassers; die Kugel bleibet also, bei großen Geschwindigkeiten, nicht ganz unter Wasser, welches doch nöthig ist, um die völlige Wirkung des Stromes zu erforschen.

Gesetzt, das Pendel sei jetzt in der Lage AP; die Richtung des Stromes, welchen wir hier merklich abschüssig annehmen, sei CP. Die Linie PB sei horizontal, und AE vertikal.

Die Kugel P verlieret im Wasser einen gewissen Theil ihres Gewichtes. Gesetzt, es bleibe ihr übrig das Gewicht P, nämlich ihr eigenthümliches Gewicht, weniger das Gewicht des von ihr verdrängten Wassers. Dieses Gewicht der Kugel kann als eine Kraft betrachtet werden, welche die Kugel gerade herunter ziehet oder stößet, und diese Kraft P kann vorgestellet werden durch eine vertikale Linie PT. Man verlängere AP, und fälle TU senkrecht auf diese Verlängerung. Man vollende, um der Deutlichkeit willen, das Parallelogramm UV; so ist die Kraft PT in zwei, nämlich PU und PV, oder PU und TU zerleget. Die erste wird durch den Widerstand bei A und durch die Festigkeit des Fadens aufgehoben. Die zweite bleibet wirksam und bestrebet sich die Kugel in der Richtung PV, welche auf AP senkrecht ist, nach der vertikalen Linie AE hinzutreiben. Es sei diese Kraft K, so ist

$$PT : PV :: P : K$$

oder $PT : TU :: P : K$

Es ist aber

$$PT : TU :: 1 : \sin. TPU$$
$$:: 1 : \sin. PAE$$

also

also $1 : \sin. PAE :: P : K$

und $K = P \sin. PAE$

Ferner sei die in der Richtung CP wirkende Kraft des Stromes $= F$. Man verlängere PC, so daß PQ diese Kraft F vorstelle, welche nach Umständen größer oder kleiner sein kann, als die Kraft P. Aus Q fälle man QS senkrecht auf die Verlängerung des Fadens AP, und man vollende das Parallelogramm SR, so stellet PS den Theil der Kraft F vor, der durch den Widerstand bei A und die Festigkeit des Fadens vernichtet ist, hingegen stellet PR oder SQ denjenigen Theil der Kraft F vor, welcher sich bestrebet, das Pendel weiter von der Vertikal-Linie AE zu entfernen, und welcher also der Kraft PV engegen arbeitet. Es sei L dieser wirksame Theil der Kraft F, so ist

$$PQ : PR :: F : L$$

oder $PQ : SQ :: F : L$

oder $1 : \sin. QPS :: F : L$

oder $1 : \sin. APC :: F : L$

Es ist aber $APC = APB - CPB$. Ferner ist im rechtwinklichten Dreieck ADP, $\angle APB$ oder $APD = 90^g - PAE$, also $APC = 90^g - PAE - CPB = 90^g - (PAE + CPB) =$ Complem. $(PAE + CPB)$, also $\sin. APC = \mathrm{Cos.}\,(PAE + CPB)$, also

$$1 : \mathrm{Cos.}\,(PAE + CPB) :: F : L$$

$$L = F. \; \mathrm{Cos.}\,(PAE + CPB)$$

Nun wird sich die Kugel P entweder der Vertikal-Linie AE nähern, oder sich von derselben entfernen, je nachdem die Kraft K größer oder kleiner ist, als die Kraft L; hingegen wird das Pendel in der Lage AP bleiben, wenn $K = L$, oder wenn

$$P. \sin. PAE = F \,\mathrm{Cos.}\,(PAE + CPB)$$

$$\text{oder wenn } F = \frac{P \sin. PAE}{\operatorname{Cos.}(PAE + CPB)}$$

und dieses ist die erforderliche Kraft des Wassers, um das Pendel in der Lage AP zu erhalten.

Es sei überhaupt φ der Winkel, den das Pendel, im Zustande des Gleichgewichtes, mit der Vertikal-Linie machet, und es sei ω der Neigungs-Winkel des Flusses gegen den Horizont, P sei wie vorher das Gewicht der Kugel im Wasser, und F die Kraft des Wassers gegen die Kugel, so ist

$$F = \frac{P. \sin. \varphi}{\operatorname{Cos.}(\omega + \varphi)}$$

Da der gestoßene Körper eine Kugel ist, so beträgt die Kraft des Stoßes halb so viel, als sie in senkrechter Richtung gegen den größten Zirkel der Kugel betragen würde (H. IV, §. 11, Zus.), oder wenn man dieses Verhältniß nicht für richtig annehmen will, so setze man anstatt $\frac{1}{2}$ mal, überhaupt λ mal. Der Stoß aber gegen den größten Zirkel verhält sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit (Hauptst. IV, §. 1, Zus. I). Also ist er gleich dem Produkte aus diesem Quadrate und irgend einer beständigen Größe μ. Es sei demnach die Geschwindigkeit v, so beträgt der senkrechte Stoß gegen den größten Zirkel μv^2, und folglich gegen die Kugel $\lambda \mu v^2$, oder wenn man setzet $\lambda \mu = a$, so ist $F = a v^2$. Folglich hat man

$$a v^2 = \frac{P. \sin. \varphi}{\operatorname{Cos.}(\omega + \varphi)}$$

Wenn man das beständige Verhältniß zweier veränderlicher Größen durch $\backsim$ ausdrücket, welches wie oder ist wie gelesen werden kann; so haben wir, indem die beständige Größe a weggelassen wird,

$$v^2 \backsim \frac{P. \sin. \varphi}{\operatorname{Cos.}(\omega + \varphi)}$$

Ge-

Gebrauchet man das nämliche Gewicht P bei verschiedenen Neigungen der Flüsse gegen dem Horizont, so ist

$$v^2 \backsim \frac{\sin.\,\varphi}{\mathrm{Cos.}\,(\omega + \varphi)}$$

Wenn der Fluß horizontal ist, oder dafür gelten kann, so ist $\omega = 0$, und

$$v^2 \backsim \frac{\sin.\,\varphi}{\mathrm{Cos.}\,\varphi}$$

oder $v^2 \backsim \mathrm{tang.}\,\varphi$

oder $v \backsim \sqrt{(\mathrm{tang.}\,\varphi)}$

das heißt, in diesem Falle verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Tangenten der Neigungs-Winkel des Pendels.

Da diese Formeln nur bloße Verhältnisse anzeigen, so muß eine Erfahrung vorhergehen. Man gebrauche also eine gewisse Kugel; man hänge sie so, daß, wenn das Pendel aufhöret, sich seitwärts zu begeben, sie ein wenig unter der Oberfläche des Wassers sei. Man bemerke mit der größten Genauigkeit, um wie viel Grade das Pendel, wenn die Ruhe erfolget ist, von der Vertikal-Linie abweichet. Wir nehmen an, der Fluß sei horizontal oder beinahe. Man beobachte zugleich die Geschwindigkeit v' des Flusses, vermöge eines schwimmenden Körpers (§. 4), so hat man für einen Winkel φ' die zustimmende Geschwindigkeit des Flusses. Gesetzt nun, in einem anderen horizontalen Flusse oder an eine andere Stelle desselbigen Flusses, oder in einer anderen Tiefe, sei der Winkel des Pendels im Zustande des Gleichgewichtes φ'' und die Geschwindigkeit v'', so ist

$$\sqrt{(\mathrm{tang.}\,\varphi')} : \sqrt{(\mathrm{tang.}\,\varphi'')} :: v' : v''.$$

$$\text{oder } v'' = \frac{v'}{\sqrt{(\mathrm{tang.}\,\varphi')}} \cdot \sqrt{(\mathrm{tang.}\,\varphi')}$$

hat man demnach einmal für allemal $\frac{v'}{\sqrt{(\text{tang.}\,\varphi')}}$ berechnet, so ist es ein leichtes, vermöge $\sqrt{(\text{tang.}\,\varphi'')}$ die Geschwindigkeit v'' zu finden.

Dasselbige erprobte Pendel kann auch bei inklinirten Flüssen gebrauchet werden. Denn es ist bei dem Versuche gewesen $\omega = 0$, bekömmt nun ω einen anderen Werth, so ist doch allemal

$$\frac{\sin.\,\varphi'}{\text{Cos.}\,(0 + \varphi')} : \frac{\sin.\,\varphi''}{\text{Cos.}\,(\omega + \varphi'')} :: v'^2 : v''^2$$

$$\text{oder tang.}\,\varphi' : \frac{\sin.\,\varphi''}{\text{Cos.}\,(\omega + \varphi'')} :: v'^2 : v''^2$$

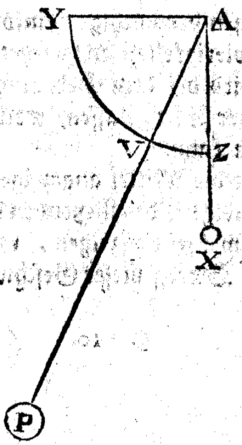
$$\text{daher } v''^2 = \frac{v'^2}{\text{tang.}\,\varphi'} \cdot \frac{\sin.\,\varphi''}{\text{Cos.}\,(\omega + \varphi'')}$$

$$\text{oder } v'' = \frac{v'}{\sqrt{(\text{tang.}\,\varphi')}} \cdot \sqrt{\frac{\sin.\,\varphi''}{\text{Cos.}\,(\omega + \varphi'')}}$$

also kann hier der nämliche beständige Faktor $\frac{v'}{\sqrt{(\text{tang.}\,\varphi')}}$ gebrauchet werden.

Die größte Schwierigkeit hierbei möchte wohl sein, die Winkel ω und φ genau zu bekommmen. Was die Neigung ω des Flusses gegen den Horizont betrift, so muß sie durch das Nivelliren gefunden werden. Um den Winkel φ zu messen den das Pendel mit der Vertikal-Linie machet, kann man einen Quadranten AZY gebrauchen, an dessen Mittelpunkte das bewußte Pendel AP befestiget ist. Ein anderes Pendel AX muß gebrauchet werden, um den Rand AZ vertikal zu stellen. Die Grade des Bogens ZV bestimmen den verlangten Winkel. Die ganze Maschine muß an einem starken Pfahl befestiget werden, der im Grund des Flusses fest eingeschlagen sei.

Da



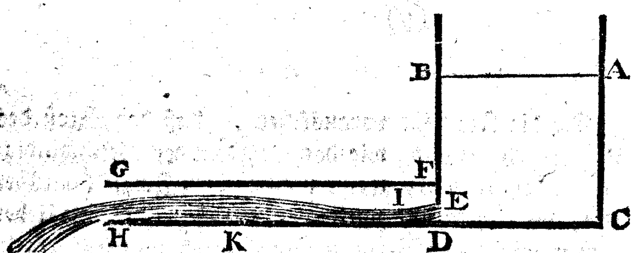
Da die Formeln voraussetzen, daß der Stoß des Wassers sich verhält, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, so könnte man, wenn man einigen Zweifel darüber hätte, die zu jedem φ zustimmende Geschwindigkeit lieber durch unmittelbare Versuche ohne Zuziehung der Formeln finden, wie schon Manfredi vorgeschlagen hat. Man müßte eine Vorrichtung erdenken, um den Quadranten AZY, ohne daß er sich drehe, über einem stillstehenden Wasser, mit jeder beliebigen einförmigen Geschwindigkeit fortzurücken, und die mit jeder Geschwindigkeit erfolgende Abweichung φ des Pendels bemerken, und in eine Tafel bringen. Dadurch hätte man die zustimmenden Abweichungen und Geschwindigkeiten für ein im ruhigen Wasser bewegtes Pendel. Es ist aber bekannt, daß die gegenseitige Wirkung einerlei ist, es mag sich der feste Körper oder das Flüssige bewegen (H. IV, §. 3). Also wäre dieselbige Tafel auch zu gebrauchen, um aus der Abweichung des ruhenden Pendels die Geschwindigkeit eines bewegten

Wassers zu erfahren. Die Ausführung dieses Vorschlags möchte wohl, wegen der nöthigen einförmigen Bewegung, erheblichen Schwierigkeiten ausgesetzet sein.

Uebrigens wird bei dem Gebrauche des Pendels der Faden ganz aus der Acht gelassen, weil man ihn seht dünn und leicht nehmen kann.

Nachdem wir die Mittel angezeiget haben, wodurch man die Geschwindigkeit des fließenden Wassers beobachten kann, so wollen wir jetzt anzeigen, was die Theorie und die Erfahrung in Betreff dieser Geschwindigkeit lehren.

§. 10.



Es sei ABCD das in einem Gefäße enthaltene Wasser, welches durch einen beständigen Zuschuß in der nämlichen Höhe erhalten wird. Es sei DE eine Oefnung unten in der Wand des Gefäßes, ganz nahe am Boden, und es sei DHGF eine Rinne, welche sich genau an die Oefnung anschließe, ausgenommen oberwärts, wo sie offen ist, und wo ihre Seitenwände sich in EF etwas höher als die Oefnung erheben. Die Rinne sei übrigens in horizontaler Lage.

Da das bei ED ausfließende Wasser sogleich durch die Rinne aufgefangen wird, so ergießt es sich nicht so frei und mit solcher Geschwindigkeit, als wenn die Rinne nicht vorhanden wäre, hingegen ist anderseits die Verengerung

des

des Strals nicht so merklich. Es wird also hier ohngefähr der Fall sein, wie bei einer kurzen Ansatz-Röhre, durch welche in einer gegebenen Zeit ohngefähr $\frac{5}{8}$ der Wassermenge ausfließt, welche ausfließen müßte, wenn der Stral die ganze Weite der Oefnung und die der mittleren Höhe BI entsprechende Geschwindigkeit hätte (H. I, §. 13, Zus. IV). Die Länge der Rinne kann nicht so viel thun, weil sich hier keine Luft einkerkern kann, wie bei langen Röhren (H. III, §. 10), weil auch hier, bei etwanigen Hindernissen, das Wasser sich nach oben zu etwas erheben kann, welches bei einer verschlossenen Röhre nicht Statt findet.

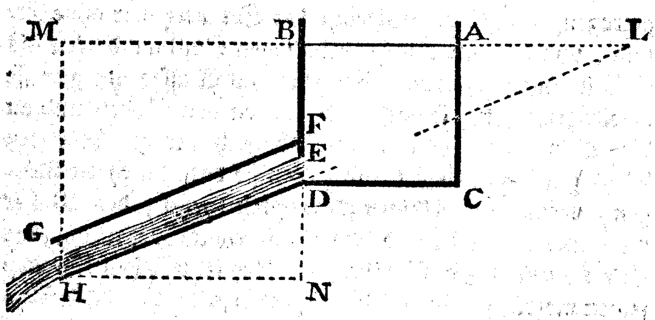
Das aus ED ausfließende Wasser wird durch die Rinne getragen, also ist die Wirkung der Schwere hier ohne Erfolg, und es sollte mit der erhaltenen Geschwindigkeit bis in H immer fortgehen. Da aber das Wasser eine gewisse Klebrigkeit hat, so hänget es sich an den Boden und an die Wände der Rinne; und obgleich nur die äußersten Theilchen sich ankleben, so halten sie doch durch die übrigen, vermöge derselbigen Klebrigkeit zurück; das Wasser wird also in der Rinne etwas aufgehalten, so daß der Stral allmählig anschwillt, und der letzte Theil KH desselben merklich dicker wird, als der erste DK. Also fließt das Wasser gegen das Ende KH der Rinne etwas langsamer, als im Anfange DK, hingegen sind die letzten Durchschnitte größer als die ersten, und ungeachtet aller Hindernisse bekömmt man in einer gegebenen Zeit durch die Mündung GH eben so viel Wasser, als wenn die Rinne nur einen kurzen Ansatz bei ED ausmachte.

Man wird also nicht viel irren, wenn man, um die Wassermenge zu erhalten, eben so verfährt, wie bei kurzen Ansatz-Röhren (Hauptst. I, §. 13, Zus. IV), es mag die Rinne lang oder kurz sein. Was aber die Geschwindigkeit betrift, so ist sie weder bei D, noch vielweniger bei H diejenige, die der Höhe BI entspricht. Die

Er-

Erfahrungen geben keine allgemeine Regel, um sie zu bestimmen. Man kann sie in jedem Falle durch obige Mittel (§. 4 bis 9) erfahren. Oder man müßte die in einer gewissen Zeit abgeflossenen Wassermenge in Kubikfußen messen, durch die Anzahl der Sekunden, und durch den Durchschnitt des Strals bei H dividiren, um die Geschwindigkeit bei H zu bekommen. Wenn man anstatt des Durchschnittes bei H, einen anderen in der Nähe der Oefnung nimmt, so bekömmt man ebenfalls die Geschwindigkeit in der Nähe der Oefnung.

§. 11.



Laßt uns jezt eine abschüssige Rinne FH betrachten; es mögen übrigens alle Buchstaben dieselbige Bedeutung beibehalten, wie in der vorhergehenden Figur.

Man verlängere AB und HD, bis daß sie einander in L begegnen. Man errichte HM lothrecht, bis daß sie der verlängerten AB in B begegnet.

Wenn wir alle Umstände aus der Acht lassen, wodurch die Bewegung verspätet wird, so fließt das Wasser bei D aus dem Gefäße mit derselbigen Geschwindigkeit, als

als wenn es von B bis D gefallen wäre, oder als wenn es von L bis D auf der schiefen Ebne LD geglitten wäre. Ferner beschleuniget es seine Bewegung immer noch von D bis H, und gehet bei H so geschwinde, als wenn es von L bis H geglitten, oder von M bis H gefallen wäre. Das heißt, es hat eine Geschwindigkeit, welche der Höhe MH entspricht.

Es ist aber weit gefehlet, daß dieses mit der Erfahrung übereinstimme. Denn erstlich schießt das Wasser durch die Oefnung ED nicht in der Richtung DH, sondern in einer Richtung, die auf der Fläche der Oefnung senkrecht ist. Ist also die Neigung etwas beträchtlich, so entstehet ein Wasserfall, das Wasser fällt in schiefer Richtung gegen die Rinne, und verlieret dadurch einen Theil seiner Geschwindigkeit. Geschiehet dieses nicht, so fließt es gleich anfänglich ohngefähr wie durch eine kurze Ansatz-Röhre, und verlieret ebenfalls einen Theil seiner Geschwindigkeit.

Ferner, auf dem Wege von D bis H wird das Wasser durch das Ankleben an die Wände der Rinne, und durch die Reibung ebenfalls zurück gehalten; wenn also die Neigung der Rinne klein ist, so verringert sich die Geschwindigkeit von D bis H, anstatt daß sie zunehmen sollte.

Herr Bossüt hat durch Erfahrungen gefunden, daß das vertikale Gefälle DN den zehnten Theil der Länge DH betragen muß, wenn die Geschwindigkeit bei H so groß sein soll, als in der Nähe von D. Alsdann beträgt also die beschleunigende Wirkung der Schwere so viel als die verspätende Wirkung der Reibung und der Klebrigkeit. Bei kleineren Gefällen beträgt diese letztere mehr, bei größeren weniger, als die Wirkung der Schwere.

Uebrigens ist die bei H ausfließende Wassermenge immer in einer gegebenen Zeit, weder größer noch kleiner, als wenn die Rinne ganz kurz wäre. Dieses wird wie bei der horizontalen Rinne erkläret (§. 10).

§. 12.

Es mag die Rinne horizontal oder geneigt sein, so lehret doch die Erfahrung, daß die Verzögerung die aus der Reibung und der Klebrigkeit entstehet, um desto weniger merklich wird, je größer die Wasserhöhe im Gefäße ist, und je größer die Oefnung ist. In beiden Fällen ist die Quantität der Bewegung des ausfließenden Wassers, theils wegen größerer Geschwindigkeit, theils auch wegen der größern Masse, größer; und das Wasser hat folglich mehr Kraft, um die Hindernisse, die sich seiner Bewegung entgegensetzen, zu überwinden.

Es ist also zu vermuthen, daß, bei einer großen Oefnung und bei einer großen Höhe des Wassers im Gefäße, ein kleineres Gefälle, als das vorgeschriebene (§. 11), hinlänglich wäre, wenn man am Ende der Rinne oder des Kanals dieselbige Geschwindigkeit erhalten will, die das Wasser nahe bei der Oefnung hat.

§. 13.

Wir haben gesaget, daß man durch die Mündung am Ende des Kanals allemal so viel Wasser erhält, als in gleicher Zeit durch die Oefnung kömmt. Dieses ist nur wahr insofern man auf die Ausdünstung keine Rücksicht nimmt. Da aber das Wasser, hauptsächlich wenn es in Bewegung ist, stark ausdünstet, so muß man sich nicht verwundern, wenn am Ende einer sehr langen Rinne, der Verlust schon zu merken ist. Ja, es kann ein Kanal so lang gedacht werden, daß alles Wasser verdünste bevor es die Mündung erreichet habe, so daß das niedrigste Ende des Bettes ganz trocken bleibe. Auf diesen Umstand haben die hydraulischen Schriftsteller wenig oder gar nicht Rücksicht genommen.

§. 14.

Flüsse entstehen aus dem Regenwasser, oder dem schmelzenden Schnee und Eise. Dieses Wasser sammlet sich

sich in sichtbaren oder verborgenen Aushölungen der Gebirge, und fließt von dort durch sein eigenes Gewicht niederwärts, bis es das Meer erreichet hat. Oefters siekert es auch durch das Erdreich und bildet kleine Adern, die sich nach und nach vereinigen, und zuletzt einen Quell ausmachen. Alles dieses Wasser entstehet größtentheils aus den Ausdünstungen der Meere, welche sich in Wolken sammlen, und vom Winde über das Land getrieben werden. Es gehet also in einem beständigen Umlaufe vom dem Meere auf das Land und vom Lande ins Meer.

§. 15.

In jedem Flusse sollte das untere Wasser schneller fließen als das obere, weil jenes von diesem gedrücket wird. Weil aber das Wasser an dem Boden und den Ränden seines Bettes theils anklebet, theils sich reibet, theils auch verschiedene Unebenheiten antrift, und weil das Wasser einen gewissen Zusammenhang seiner Theile hat, wodurch die Verspätung einiger Theile sich den nächsten mittheilet, so pfleget die Geschwindigkeit nahe am Grunde und an den Ufern nicht die größte zu sein, sondern in den meisten Fällen ist die größte Geschwindigkeit irgendwo zwischen dem Wasserspiegel und dem Boden des Bettes, bald höher bald niedriger (§. 5).

§. 16.

Da das Bett eines Flußes als eine schiefe Ebne zu betrachten ist, so sollte der Fluß immer geschwinder und geschwinder gehen, je weiter er sich von seinem Ursprunge entfernet. Da aber doch in gleichen Zeiten durch alle Queerschnitte gleich viel Wasser gehen muß, so muß die Größe der Queerschnitte in selbigem Verhältnisse abnehmen, wie die Geschwindigkeit zunimmt, das heißt, wenn das Bett allenthalben eine Gleiche Weite hat, so muß die

Tiefe

Tiefe des Wassers immer mehr und mehr abnehmen. Diese regelmäßige Zunahme der Geschwindigkeit und Abnahme der Tiefe wird aber größtentheils durch die Reibung, die Klebrigkeit und die Unebenheiten des Bettes verhindert. Soviel ist indeß gewiß, daß an jeder Stelle, wo die Geschwindigkeit durch irgend eine Ursache, als z. E. durch ein größeres Gefälle, oder durch die Verengerung des Bettes, zunimmt; der Flächen-Inhalt des Queerschnittes verhältnißmäßig abnehmen muß, und umgekehrt, wenn die Geschwindigkeit abnimmt, so muß der Queerschnitt zunehmen, das heißt, es muß entweder das Wasser anschwellen, oder das Bett muß breiter werden, oder es muß sich vertiefen.

§. 17.

Der Wasserspiegel von einem Ufer zum anderen ist nicht allemal vollkommen eben, sondern entweder etwas konvex, oder etwas konkav. Wenn man also eine horizontale Linie von einem Ufer zum anderen zöge, so würde manchmal das Wasser in der Mitte eines breiten Flusses wohl um 2 oder 3 Fuß gedachter Linie näher oder von ihr entfernter sein, als am Rande. Beides kann auf verschiedene Arten durch das Hinzukommen oder die Wegräumung verschiedener Hindernisse, und durch die Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeit, wenn sie nicht verhältnißmäßig an den Ufern, wie in der Mitte geschiehet, erkläret werden.

§. 18.

Nicht nur gehen nicht alle Theile des Flusses mit gleicher Geschwindigkeit, sondern manchmal giebt es sogar Stellen, wo das Wasser entweder stille stehet, oder gar zurückgehet. Zum Exempel, wenn an einer Stelle Hindernisse vorkommen, wodurch die Geschwindigkeit vermindert wird, das Bett aber weder an Breite noch an Tiefe

Tiefe zunimmt, so muß sich das Wasser erheben, und eine Art von Hügel bilden. Der oberste Theil dieses Hügels wird nun ziemlich stille stehen, auf den Abhange aber kann das Wasser zum Theile rückwärts gleiten.

§. 19.

Wenn ein Fluß durch geschmolzenen Schnee, oder andere Ursachen, anschwillt; so ist zu vermuthen, daß sich seine Geschwindigkeit deswegen nicht merklich verändert. Daher kömmt es, daß ein solcher Fluß manchmal aus seinen Ufern tritt, und das Land überschwemmet, welches nicht geschehen würde, wenn die Schnelligkeit verhältnißmäßig mit der Wassermenge zunähme.

Die Hauptursache dieser unveränderten Geschwindigkeit lieget darin, daß die Geschwindigkeit größtentheils von dem Gefälle und der Neigung des Bettes abhängt. Dieses Gefälle aber und diese Neigung werden durch das neue hinzukommende Wasser nicht geändert, also ändert sich auch die Geschwindigkeit, wenigstens aus dieser Ursache, nicht.

Die Ströme, welche von geschmolzenem Schnee oder anderen Ursachen herrühren, fallen seitwärts ein, wodurch ein Stoß beider Wässer an einander, und folglich eine Verspätung bewirket wird.

Anderseits aber ist im Gegentheil eine Beschleunigung zu erwarten. Denn, da das Wasser an der Stelle, wo der Zufluß geschiehet, höher wird, so lieget dort der Wasserspiegel höher als weiter unten, folglich hat wenigstens das obere Wasser mehr Gefälle. Auch wird das untere Wasser durch die hinzukommende Last mehr gedrücket, welches auch zur Beschleunigung beiträgt.

Wenn man also einerseits die Verminderung, und anderseits die Vermehrung der Geschwindigkeit erwäget, so siehet man, daß die Geschwindigkeit wohl ohngefähr unverändert bleiben mag.

§. 20.

Da ich von der Beschleunigung des unteren Wassers durch den Druck des oberen geredet habe, so will ich meine Meinung hierüber erklären. Einige Schriftsteller behaupten, daß, wenn das untere Wasser an sich selbst so viel oder mehr Geschwindigkeit hat, als das obere ihm durch seinen Druck geben könnte, alsdann keine Beschleunigung Statt finden könne, eben so wenig als der Gang einer Kugel dadurch beschleuniget wird, daß andere Kugeln ihr mit derselbigen oder einer geringeren Geschwindigkeit nachfolgen. Mir scheinet aber der Fall ganz verschieden zu sein, indem das obere Wasser nicht wie eine Kugel auf eine andere vorangehende wirket, sondern vielmehr durch einen senkrechten Druck, dessen Wirkung eigentlich ist, die unteren Wassertheilchen beständig mehr auseinander zu treiben. Man stelle sich anstatt des oberen Wassers ein Brett vor, welches das untere Wasser bedecket, und mit einem Gewichte beladen ist; so würde, glaube ich, das untere Wasser sich bestreben dahin zu gehen, wo der wenigste Widerstand ist, nämlich nach der Mündung des Flusses hin. Was das beladene Brett thun würde, muß vermuthlich auch die Last des oberen Wassers thun.

§. 21.

Um das Austreten der Flüsse zu verhüten, erbauet man Dämme längs den Ufern. Ein Damm ist eine längs den Ufer sich erstreckende, über das Erdreich erhabene Masse von festgestampfter Erde oder von Mauerwerk, welche dem Wasser, wenn es über sein natürliches Ufer anschwillt, hinlänglich widerstehet. Die Dämme müssen unten dicker sein als oben; theils weil der Druck des Wassers von oben nach unten zunimmt, theils auch, weil das Wasser auf den inwendigen Theil des Dammes wie auf einen Hebel wirket, der seinen Ruhepunkt unten an der

Erde

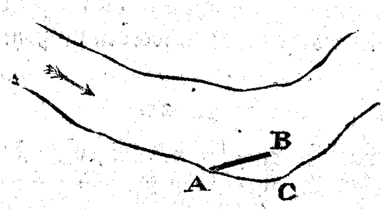
Erde hat: wäre dieser Punkt nicht durch den Druck der Mässe hinlänglich unterstützet und befestiget, so würde sich der ganze Hebel um denselben herumdrehen, das heißt, der Damm würde nach aussen hin umgestürzet werden. Ich will mich hier nicht in Untersuchungen über die Einrichtung der Dämme einlassen. Die Regeln, die sich darauf beziehen, sind mehr praktisch als theoretisch, indem vieles auf die Beschaffenheit der Materie, woraus der Damm bestehet, auf die besonderen Eigenschaften des Stromes, und auf lokale Umstände ankömmt.

§. 22.

Die Flüsse nagen beständig an ihren Ufern, das heißt, das Wasser erweichet das Ufer, und löset die Theilchen desselben ab; der Strom schleppet diese abgerissenen Theilchen mit sich fort, und sie pflegen sich am Grunde zu setzen. Daher siehet man, daß die Ströme meistens an Breite zunehmen, und an Tiefe verlieren, welches der Schiffart sehr hinderlich ist.

§. 23.

Wo das Bett eine plötzliche Krümmung hat, so stößt das Wasser an das eckigte Ufer, und zernaget es mehr als andere Stellen des Ufers, so daß der Fluß sich dort je mehr und mehr ausbreitet, und einen Theil des Erdreichs wegnimmt. Um dieses zu verhindern, pfleget man dem Wasser, bevor es an eine solche Stelle kömmt, vermittelst



einer schiefen Fläche AB, woran es stößt, eine andere Richtung zu geben. Auf diese Art wird der Stoß gegen die Ecke C des Ufers viel gelinder, und weniger wirksam.

§. 24.

Wenn man will, daß das Wasser sich an einer Stelle des Flusses anhäufen und höher über dem Grunde seines Bettes stehen soll, so wird eine **Wehr**, das heißt, eine Art von Damm queer durch das Bett aufgeführet; alsdann häufet sich das Wasser, bis daß es über die Wehr wegfließt. Man kann auch in der Wehr selbst eine Oefnung machen, welche sich vermöge eines Schutzbrettes vergrößern und verkleineren läßt, um nach Gefallen das Wasser vor der Wehr höher oder niedriger zu erhalten. Da aber solche Wehre die Schiffarth hindern, so gebrauchet man anstatt derselben bei nicht zu großen Strömen und Kanälen die Schleusen. Diese sind große zweiflügelichte Thore, welche die ganze Breite des Kanals einnehmen, nach Gefallen geöfnet und verschlossen werden können, und ebenfalls mit Oefnungen und Schutzbrettern versehen sind. Jeden Flügel pfleget man etwas breiter als die halbe Breite des Kanals zu machen; auf diese Art bildet die Schleuse, wenn sie geschlossen ist, einen stumpfen Winkel, und beide Flügel stützen sich gegen einander. Durch diese Einrichtung erhält die Schleuse mehr Festigkeit, als wenn beide Flügel, wie sonst an Thoren gebräuchlich ist, in einer und derselbigen Ebne zu stehen kämen, und durch eine Schwelle oder irgend ein anderes Mittel in dieser Lage erhalten werden müßten.

§. 25.

Wenn zwei Ströme sich vereinigen, so stoßen die Wässer in schiefen oder senkrechten Richtungen gegen einander, wodurch die Geschwindigkeiten vermindert werden. Wir wollen

wollen fürs erste anstatt der irregulären Flußbetten solche Kanälen betrachten, deren Durchschnitte Parallelogramme sind, und um mehrerer Simplizität willen annehmen, die Böden der beiden Kanäle vor der Vereinigung, und des einzigen Kanals nach der Vereinigung, liegen alle drei in einer geneigten Ebne. Ferner wollen wir den Fall setzen, daß vor der Vereinigung die Geschwindigkeit, wie auch die Tiefen gleich sind, und daß der Kanal nach der Vereinigung so viel Breite habe, als beide unvereinigte zusammengenommen.

Wenn nun durch den Zusammenstoß der Wässer die Geschwindigkeit nicht vermindert würde, so wäre es der nämliche Fall, als wenn beide Wässer vor der wirklichen Vereinigung schon zusammengeflossen hätten, in einem Kanal, der so viel Breite hätte, als beide zusammengenommen. Da es also wieder in solchem Kanal tritt, so würde es seinen Lauf mit unveränderter Geschwindigkeit fortsetzen.

Da aber die Geschwindigkeit sich durch den Stoß vermindert, und der Kanal sich nach der Vereinigung nicht erweitert, so muß das Wasser sich in der Gegend der Vereinigung anhäufen, und in dem Kanal anschwellen, folglich muß überhaupt der vereinigte Strom tiefer oder höher sein, als die beiden einzelnen. Indessen vermehret diese Tiefe anderseits die Schnelligkeit des unteren Wassers, und machet, daß es sich nicht gar zu sehr in der Gegend der Vereinigung anhäufen kann.

Haben die Kanäle in der Gegend der Vereinigung nicht genug hohe Ufer, so kann eine Ueberschwemmung entstehen.

Ist der Kanal, der beide Ströme empfängt, enger als beide zusammengenommen, so wird das Anschwellen noch stärker, und die Gefahr der Ueberschwemmung grösser. Ist aber der Kanal, welcher beide Ströme empfängt, breiter als die beiden zusammengenommen, so thürmet sich das Wasser darin nicht so viel, als im ersten Falle, weil es Platz hat, sich in die Breite auszudehnen. Und zwar, wenn der Vereinigungs-Kanal an Breite, die Summe der beiden anderen Breiten so vielmal übertrift, als die Geschwindigkeit durch den Stoß vermindert worden, so steiget das Wasser darin nicht höher, als in den beiden einzelnen Kanälen, indem alsdann in einer gegebenen Zeit durch einen Queerschnitt des Vereinigungs-Kanals so viel Wasser fließen kann, als durch die beiden gleich hohen Querschnitte der anderen Kanäle.

Ist der Durchschnitt des Vereinigungs-Kanals noch größer, so wird das Wasser nach der Vereinigung weniger Tiefe haben, als vorher.

Wenn beide Wässer vor der Vereinigung verschiedene Geschwindigkeiten haben, so wird sich das Gesagte ohne großen Irrthum auf die mittlere Geschwindigkeit anwenden lassen.

Wenn der Boden des Bettes nach der Vereinigung an Tiefe zunimmt oder abnimmt, so wird dieses ohngefähr eben so viel gelten, als wenn er verhältnißmäßig an Breite zu- oder abgenommen hätte.

Wenn man sich durch den Vereinigungs-Kanal und einen der beiden anderen eine Ebne gedenket, und der dritte nicht darin lieget, so wird der Erfolg ohngefähr so sein, als wenn er darin läge, sein Wasser aber die Geschwindigkeit behielte, die es wirklich hat.

Wenn ein Strom mehr Tiefe hat, als der andere, so wird der Fall sich ohngefähr so verhalten, als wenn beide eine mittlere Tiefe hätten.

Wenn die Durchschnitte nicht Parallelogramme sind, wie bei Flußbetten, so wird der Erfolg ohngefähr so ausfallen, als wenn an den Stellen dieser Durchschnitte Parallelogramme von gleichen Flächen-Inhalten wären.

Auf diese Art kann man sich also einen hinlänglichen Begriff von der Vereinigung der Flüsse machen.

§. 26.

§. 26.

Wenn man also bestimmen könnte, wie viel ein Wasser an Geschwindigkeit verlieret, wenn es an ein anderes Wasser, oder überhaupt an ein anderes Hinderniß stößt, so wäre es nicht schwer, die Geschwindigkteit eines Flusses zu erforschen, der aus der Vereinigung zweier Ströme entstehet. Diesen Verlust an Geschwindigkeit zu bestimmen, hat man noch nicht Erfahrungen genug gesammlet, worauf man eine Theorie gründen könnte. Ueberhaupt siehet man aber doch ein, daß bei dem Stoße einer Flüssigkeit gegen irgend ein Hinderniß, z. E. gegen eine andere Flüssigkeit, oder gegen die Ecken eines Ufers, weniger Geschwindigkeit verloren gehet, als wenn ein harter Körper gegen einen anderen stößt. Denn die allermeisten Wassertheilchen ändern ihre Richtung nicht plötzlich, sondern allmählig, und beschreiben krumme Linien. Es ist aber bekannt, daß wenn ein Körper in einer zusammenhängende krummen Linie, ohne scharfe Ecken gehet, er dadurch nichts von seiner Geschwindigkeit verlieret. In dieser Rücksicht also gehet das Wasser nach der Biegung seiner Bahn so schnell als vorher. Zwar müssen diejenigen Wassertheilchen, die der Ecke, wo der Stoß geschiehet, am nächsten sind, entweder wirklich gebrochene Linien beschreiben, oder gar in einem Kreise Wirbeln; diese machen aber den kleinsten Theil des Stromes, und ihre Langsamkeit kann die mittlere Geschwindigkeit des Flusses nicht sonderlich vermindern.

Daß dennoch eine wirkliche Verminderung Statt findet, ob sie gleich nicht so beträchtlich ist, als bei dem Stoße fester Körper, lehret die Erfahrung. Diese Verminderung läßt sich erklären, wenn man bedenket, daß das wenige in der Nähe des Hindernisses aufgehaltene Wasser zugleich noch mehr Wassertheilchen, die nicht so nahe liegen, durch die Klebrigkeit und den Zusammenhang aufhält, hällt, daß die Wassertheilchen sich ausserdem an einander und am Ufer reiben, und diese Reibung bei einer kurzen Umbiegung der Bahn stärker ist, und daß auch diese Verspätung auf die entfernteren Theile einen Einfluß hat. Vielleicht giebt es noch mehr Ursachen, die bis jetzt noch nicht recht bekannt sind.

§. 27.

Wenn sich ein Fluß in zwei Arme zertheilet, so entstehet bei der Zertheilung ebenfalls ein Stoß an der zwischen beiden Armen liegenden Erdzunge. Die Geschwindigkeit wird demnach vermindert, folglich wird die Summe der Queerschnitte des Wassers in beiden Armen größer, als der einzelne Queerschnitt des Flusses vor der Zertheilung. Wenn also die Böden der Betten in einer Ebne liegen, so müssen die Summen der Breiten der Arme mehr betragen, als die Breite des ungetheilten Flusses, nämlich so vielmal mehr als jetzt weniger Geschwindigkeit vorhanden ist. Beträgt die gedachte Summe weniger als diese Proporzion erfordert, so schwellet das Wasser in der Gegend der Zertheilung an, und kann aus den Ufern treten. Ist die Summe aber größer, so wird das Wasser in beiden Armen weniger tief, als im ungetheilten Flusse.

Man kann hierbei ohngefähr eben solche Zusätze und Bemerkungen machen, wie vorher bei der Vereinigung der Flüsse.

§. 28.

Wenn ein Fluß, welchen wir den Hauptfluß nennen wollen, in gerader Richtung fortgehet, sein Bett auch einerlei Tiefe und Breite behält, und wenn ein Nebenfluß seitwärts, in welcher Richtung man will, hineinfällt, so müssen beide in dieser Gegend mehr oder weniger aufschwellen. Denn durch den Stoß verlieret der Nebenfluß einen

einen Theil seiner Geschwindigkeit, weswegen sich sein Wasser anhäufet; und da dieses sich mit dem Wasser des Hauptflusses vermischet, so hält es auch dieses etwas zurück. Ferner, wenn auch diese Vermischung nicht sogleich auf der entgegengesetzten Seite des Hauptflusses geschiehet, so nimmt doch das Wasser des Nebenflusses einen Theil vom Bette des Hauptflusses ein, welches die nämliche Wirkung thut, als wenn dieses Bett verengert wäre, und das Wasser des Hauptflusses zwänge sich in die Höhe auszudehnen. Siehe auch oben §. 19.

Es kann bei solchen Umständen nicht anders sein, als daß das Wasser des Hauptflusses durch den Stoß des Nebenflusses einen stärkeren Druck gegen das entgegengesetzte Ufer bekomme. Wenn also dieses keine große Festigkeit hat, so ist zu erwarten, daß es allmählig abgenaget werde, und das Bett sich an dieser Stelle vergrößere.

§. 29.

Wenn aus einem Hauptflusse ein Nebenfluß oder ein Kanal abgeleitet wird, so wird das untere Wasser des Hauptflusses durch den Druck des oberen in den Kanal hineingetrieben, der Wasserspiegel des Hauptflusses bekömmt in dieser Gegend eine Neigung nach dem Kanal hin, und ein Theil des oberen Wassers ergießt sich auch in den Kanal, theils wegen dieser Neigung, theils wegen seiner Verbindung mit dem unteren. Da nun ein Theil des Wassers seinen Lauf ändert, und an der Ecke stößt, wo der Kanal in den Hauptfluß hineingehet, so wird auch das übrige Wasser dadurch etwas zurückgehalten. Es entstehet also in dieser Gegend eine etwas geringere Geschwindigkeit. Wenn wir also annehmen, daß die Gründe der Betten in einer Ebne liegen, so muß die Summe der Breiten des Flusses und des Kanals die bloße Breite des Flusses allein so vielmal übertreffen, als die Geschwindigkeit vermindert worden, wenn das Wasser im Flusse und im Kanal ohngefähr so tief bleiben soll, als es vorher im Flusse allein war. Da aber in den meisten Fällen der Verlust an Geschwindigkeit nur wenig beträgt, so brauchet auch der Kanal nur wenig Breite zu haben, um daß die gemeldete Proporzion Statt finde. Hat er mehr Breite, als diese Proporzion erfordert, so sinket das Wasser nach der Zertheilung. Hätte er aber weniger, so würde es etwas steigen. Es klinget zwar sehr parador, wenn man saget, das Wasser könne in einem Flusse eben dadurch anwachsen, daß man etwas davon ableitet; indessen stimmet dieses sehr gut mit den Bemerkungen, die wir oben über die Vertheilung der Flüsse gemacht haben.

Da das Wasser im gegenwärtigen Falle einen Schuß nach dem Kanal hin bekömmt, und sich an den Ecken desselben stößt oder reibet, so bestrebet es sich diese Ecken allmählig abzurunden, welches auch geschiehet, wenn sie nicht Festigkeit genug haben.

§. 30.

Alle Flüsse ergießen sich sich zuletzt ins Meer, und indem sie dieses thun, finden sie im Wasser des Meeres einen beträchtlichen Widerstand, welcher ihre Geschwindigkeit vermindert. Dieses aufgehaltene Wasser hält auch das nächste hinter sich bis zu einer gewissen Strecke auf. Da nun das Wasser langsamer gehet, so häufet es sich an, und da es sich nicht viel in die Höhe ausdehnen kann, so dehnet es sich in die Breite aus, sucht auch wohl neue Auswege, und bildet verschiedene Arme. Der Grund der Flüsse aber pfleget sich in der Nähe des Meeres allmählig zu erheben. Denn so lange der Strom noch schnell fließet, schleppet er verschiedene Theilchen die er von seinen Ufern und von seinem Boden abgenaget hat, auch wohl andere fremde Materien mit sich. Da aber nahe am Meere das Wasser langsamer gehet, indem es sich mehr

aus-

ausbreitet, so bleiben alle diese Körperchen am Boden sitzen und häufen sich dort an. Da sich der Boden auf solche Art erhebet, so ist das Wasser um desto mehr gezwungen, sich seitwärts zu verbreiten; und andere Wege zu suchen. Dieses lehret die Erfahrung. Die Mündungen der Flüsse verstopfen sich mit der Zeit, so daß sie zur Schiffarth unbrauchbar werden.

Man hat verschiedene Mittel erdacht, um diesem Uebel abzuhelfen, oder zuvor zu kommen. Der Sand oder Schlamm, der sich an der Mündung gesetzet hat, kann, obgleich mit vieler Mühe, durch Maschinen herausgenommen werden. Das beste aber ist, wenn es die Umstände zulassen, eine gewisse Strecke des Flusses in der Nähe des Meeres in starken Dämmen von Mauerwerk einzuschließen, und diese Dämme noch eine Strecke lang ins Meer zu verlängern. Da ein solcher verengerter Fluß mehr Geschwindigkeit bekömmt, so treibet er den Bodensatz weiter und tiefer ins Meer hinein, und es bleibet darüber eine hinlängliche Wasserhöhe zum Gebrauche der Schiffarth.

Sechstes Hauptstück.

Von Wasserrädern und Windflügeln.

§. 1.

Ein Wasserrad ist ein Rad, welches sich um seine Axe drehen läßt, die nicht aus ihrer Lage weichen kann, und dessen Umfang mit Schaufeln oder mit Kasten versehen ist, vermöge welcher das Wasser auf einen Theil dieses Umfanges wirket, und das Rad herumdrehet. Solche Räder werden gebrauchet, um verschiedene Maschinen, hauptsächlich Wassermühlen in Bewegung zu setzen.

§. 2.

Unterschlächtig wird ein Wasserrad genannt, wenn es durch den Stoß des Wassers allein beweget wird; weil in diesem Falle das Wasser gewöhnlicher Weise an das Rad **unten schlägt**, oder dasselbe unterwärts berühret. **Oberschlächtig** ist ein Wasserrad, welches zugleich durch den Stoß und das Gewicht des Wassers, oder auch durch das Gewicht allein gedrehet wird; weil das Wasser in diesem Falle **oben schlägt**, das heißt, den oberen Theil des Rades am ersten berühret.

Zum unterschlächtigen Rade gehören bloße Schaufeln, das heißt, solche Bretter, die in gleichen Entfernungen von

von einander angebracht sind, und auf dem Umfange des Rades entweder senkrecht oder schief stehen. Diese Schaufeln tauchen sich eine nach der anderen in das strömende Wasser, und werden von ihm fortgetrieben, welches die drehende Bewegungen des Rades verursachet. Die Beschaffenheit des oberschlächtigen Wasserrades werden wir weiter unten beschreiben.

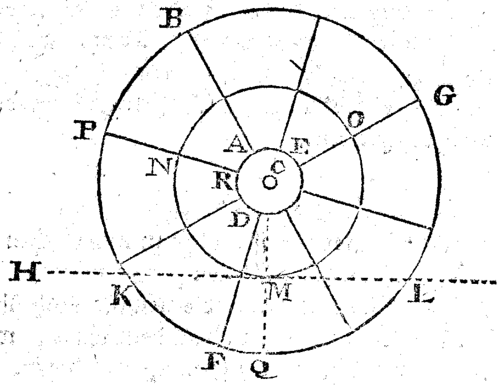
§. 3.

Um die Kraft eines Wasserrades zu untersuchen, muß man einen Strick um seine Wellen herum wickeln, diesen Strick über eine Rolle führen, die ziemlich hoch über der Wasserfläche angebracht sei, und an dem Ende, welches von der Rolle herabhängt, ein Gewicht befestigen. Dieses Gewicht wird sich, wenn das Rad arbeitet, mit einer gewissen Geschwindigkeit aufwärts bewegen, und die Kraft der Maschine wird sich jedesmal verhalten, wie das Produkt aus dem angeführten Gewichte und seiner Geschwindigkeit. Es muß aber diese Kraft des Rades erst nach den 5 oder 6 ersten Umdrehungen beobachtet werden, weil alsdann die Geschwindigkeit schon einförmig geworden ist. Denn da sowohl der Stoß als auch des Gewicht des Wassers Kräfte sind, die durch einen fortgesetzten Druck wirken, so äußern sie nicht ihre volle Wirkung plötzlich, sondern nach einer gewissen Zeit, die aber meistens nur kurz ist.

§. 4.

Wir betrachten für jetzt bloß die unterschlächtigen Wasserräder.

Es sei ADEA (folg. Fig.) der Durchschnitt des Wellbaumes, und C der Durchschnitt des Zapfens, worauf er läuft. Anstatt des Rades und der daran befestigten Schaufeln, wollen wir uns fürs erste lange Schaufeln oder Flügel wie AB vorstellen, die unmittelbar am Wallbaume



baume befestiget sind, und uns einen Zirkel BFGB gedenken, der die Enden aller Schaufeln begränzet. Auf diese Art bleibet die Höhe der Schaufeln, das ist, ihre Ausmessung in der Richtung nach dem Wellbaume hin, unbestimmt. Wird nun der Bogen KFL gegeben, der zu erkennen giebt, wie tief das Rad unter der Wasserfläche IH gehen soll, so wird eben dadurch der Zirkel MNOM bestimmet, der den nämlichen Mittelpunkt C hat, und die Wasserfläche berühret. Denn sein Halbmesser CM ist gleich dem Kosinus des halben Bogens KFL, wenn man diesen Kosinus für den größeren Halbmesser berechnet, welches nicht schwer zu beweisen ist, so bald man nur in Gedanken CK oder CL ziehet. Hierdurch wird die Höhe NP der Schaufeln bestimmet. Diese ist gleich dem Unterschiede beider Halbmesser CQ und CM. Nun fällt der übrige Theil NR jedes Flügels weg. Es wird ein Rad gemacht, wovon MNOM der äußere Umfang ist, und welches durch Schelgen mit der Welle verbunden wird: auf dem Umfange werden Schaufeln wie NP aufgestellet

gestellet und befestiget. Oder es werden zwei parallele Ringe gemacht, wie BFGBNMON, zwischen diesen werden die Schaufeln angebracht, und die Ringe werden vermittelst starker Schelgen, oder auf eine andere bequeme Art mit dem Wellbaume verbunden.

Wir nehmen für jetzt an, daß die Schaufeln sowohl auf dem Umkreise des äußern Zirkels, als auch auf der Ebne dieses Zirkels senkrecht stehen.

§. 5.

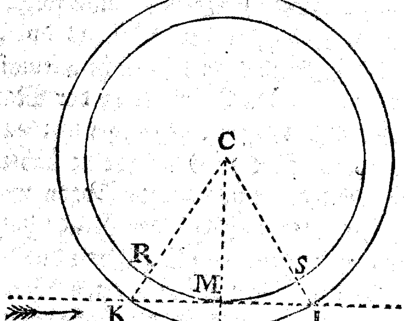
Die erste Frage die einem jeden, in Betreff solcher Räder, beifallen wird, ist diese: **Wie tief muß das Rad ins Wasser gehen, oder wie groß muß man den Bogen KFL der unter Wasser sein soll, annehmen?** Hierauf kann keine allgemeine Antwort gegeben werden, indem man meistens durch verschiedene Umstände gebunden ist. Man muß sich einerseits nach der Tiefe des vorhandenen Wassers richten, welches entweder ein natürlicher Strom oder ein künstliches Gerinne ist. Bei tieferem Wasser kann ein größerer Bogen des äußeren Umfanges eingetauchet werden. Anderseits wird auch der Halbmesser des äußeren Kreises, und folglich die Anzahl der Grade des eingetauchten Bogens durch die Lage des Wellbaumes bestimmet, welche nicht allemal willkührlich ist, sondern von der Einrichtung der Maschine abhängt, die durch das Wasserrad beweget werden soll. Bei einerlei Tiefe des Wassers verursachet eine höhere Lage des Wellbaumes, daß der eingetauchte Bogen zwar an sich selbst länger wird, aber doch weniger Grade hat. Wenn es die Umstände erlauben, so pfleget man das Rad so einzurichten, daß der eingetauchte Bogen ohngefähr 36 Grade betrage, und dann wird die Höhe der Schaufeln ohngefähr der 10te Theil vom Durchmesser oder der fünfte Theil vom Halbmesser des äußern Umkreises, das

heißt,

heißt, es wird ohngefähr $MQ = \frac{1}{5} CQ$. Dieses Verhältniß ist aus der Erfahrung als vortheilhaft bekannt, obgleich dessen Vorzüglichkeit auf keine mathematische Art bewiesen ist. Hat das Wasser nur wenig Tiefe, so muß man, was an der Höhe der Schaufeln mangelt, durch ihre Breite ersetzen, das heißt, man muß diejenige ihrer Ausmessungen, welche auf der Fläche des äußeren Zirkels senkrecht ist, um desto größer machen. Dadurch erhält man, daß eine größere Wassermasse zugleich auf die Schaufeln stößt, und folglich der Maschine mehr Kraft eingedrücket wird.

§. 6.

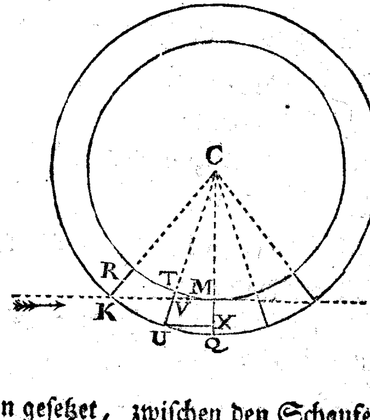
Es frägt sich ferner, wenn der eingetauchte Theil des äußeren Umkreises oder auch des Halbmessers gegeben wird, wie viel Schaufeln muß man am Rade anbringen, oder in welcher Entfernung von einander müssen die Schaufeln stehen? Einige Hydrauliker geben die Regel, man müsse die Entfernung der Schaufeln so einrichten, daß, sobald eine Schaufel in vertikaler Lage im Wasser stehet, die folgende zugleich anfange, sich ins Wasser zu tauchen.



Nämlich

Nämlich, es sei LQK der eingetauchte Bogen, und MQ eine Schaufel in vertikaler Lage, so müßte die nächstfolgende KR so angebracht werden, daß der Bogen QK oder MR an Graden halb so viel betrüge, als der Bogen LQK oder SMR. Man brauchte also nur 360 durch die Anzahl der Grade des halben eingetauchten Bogens zu dividiren, um die Anzahl der Schaufeln zu bekommen. Zum Exempel, wenn der Bogen LQK von 36 Graden ist, so ist QK oder MR von 18 Graden, und wenn man 360 durch 18 dividiret, so kömmt 20. Also würde ein Rad, das bis zum 10ten Theil seines Halbmessers eingetauchet ist, 20 Schaufeln bekommen. Diese Einrichtung, die bei Vielen Beifall findet, pflegt man folgender Weise zu vertheidigen.

Mehr Schaufeln, sagt man, sind überflüssig.



Denn gesetzet, zwischen den Schaufeln MQ und RK, welche nach der gegebenen Regel angebracht worden, schalte man noch eine andere TU ein, so wirket der schiefe Stoß des Wassers auf ihren Theil VU der ihm ausgesetzet ist. Man ziehe UX horizontal, so wird der Theil MX der lothrechten Schaufel durch den Theil UV der schiefen gedecket, also tritt der Stoß gegen UV an die Stelle des Stoßes gegen MX. Hingegen bleibet der Stoß gegen XQ wie vorher.

Es werde der Stoß gegen MX mit F und gegen UV mit f bezeichnet, so ist (Hauptst. IV, §. 8)

$$F : f :: 1 : \text{Cosin. } MCV$$

$$\text{oder } f = F. \quad \text{Cosin. } MCV$$

Ferner, wenn wir die Stoßpunkte in den Schwerpunkten (oder hier den Mittelpunkten) der gestoßenen Flächen setzen (Hauptst. IV, §. 14, Zus. III), so verhalten sich die Momente der Stöße

$$\text{wie } F \times CM \text{ zu } f \times CV$$

indem wir, um die Figur nicht zu verwirren, die Punkte M und V anstatt der Mittelpunkte von MX und VU gebrauchen. Es ist aber

$$CV : CM :: 1 : \text{Cos. } MCV$$

$$\text{also } CM = CV. \text{ Cos. } MCV.$$

Also verhalten sich die Momente

$$\text{wie } F.\ CV.\ \text{Cos. } MCV \text{ zu } f.\ CV$$

$$\text{oder da } f = F.\ \text{Cos. } MCV,$$

$$\text{wie } F.\ CV\ \text{Cos. } MCV \text{ zu } F.\ CV.\ \text{Cos. } MCV$$

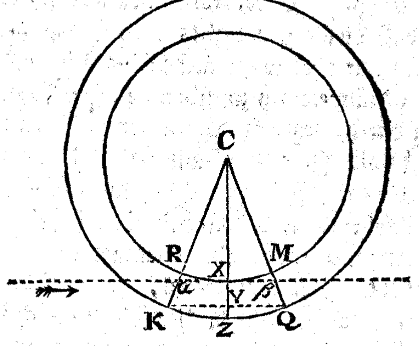
das heißt, beide Momente sind gleich.

Also hat das Wasser eine gleiche Wirkung auf die Maschine, vermittelst des Rades, es mag gegen VU oder MX stoßen.

Folglich ist die Schaufel TU, nebst allen übrigen eingeschalteten überflüssig, und es wird nur durch solche Einschaltung das Rad unnützer Weise belastet, und die Reibung vermehret.

Weniger Schaufeln, als die durch obige Regel bestimmte Anzahl, darf man auch nicht anbringen. Denn, wenn man sie weiter auseinander setzte, so würde die Schaufel RK (vor. Fig.) das Wasser nicht eher berühren, als wenn MQ schon durch die vertikale Linie CQ gegangen wäre, alsdann wäre der Stoß auf MQ schon schief, und folglich wäre dessen Wirkung auf das Rad und die Maschine vermindert.

Gegen diese Theorie lassen sich verschiedene Einwürfe machen. Was die geringere Anzahl der Schaufeln betrift, so ist wohl ungezweifelt, daß sie nicht gestattet werden kann. Auch kann man nicht leugnen, daß eine größere Anzahl das Gewicht des Rades und folglich die Reibung vermehret. Indessen entstehen daraus andere Vortheile, welche diese Unbequemlichkeit überwiegen können.



Erstlich, wenn zwei auf einander folgende Schaufeln MQ und RK in eine solche Lage gekommen sind, daß die Vertikal-Linie CZ den Bogen QK oder MR zwischen beiden, oder den Winkel QCK den sie, verlängert, einschließen, halbiret, so wirket, nach der angenommenen Theorie das Wasser durch sein Moment in schiefer Richtung auf den Theil αK nur so stark, als es auf den Theil XY der eingebildeten vertikalen Schaufel XZ (siehe kurz vorher) wirken würde.

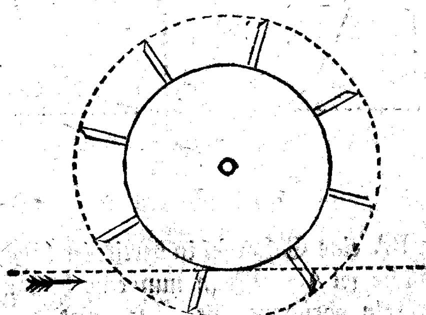
 Auf

Auf βQ wirket es gar nicht, weil βQ durch αK gedecket wird. Folglich wird in dieser Lage die Wirkung auf einen Theil YZ der eingebildeten Schaufel verloren. Je näher aber die Schaufeln MQ und RK beisammen sind, um desto kleiner wird YZ und die verlorne Wirkung. In jeder andern Lage (außer der vertikalen) ist zwar der Verlust nicht so groß, aber doch um desto größer, je größer die Entfernung der Schaufeln ist. Also siehet man, daß es in der That vortheilhaft ist, die Schaufeln näher an einander zu rücken, wenn man sie nur nicht so zahlreich machet, daß sie das Rad zu sehr beschweren, oder daß der äußere Umfang fast zusammenhängend und wegen der Dicke der Schaufeln, beinahe rund wie ein Wagenrad werde. Zweitens, es wurde angenommen, daß der Theil αK einer Schaufel den Theil βQ der folgenden allemal vollkommen decke, so daß dieser gar nichts vom Stoße des Wassers leide. Dieses hat aber wohl nicht seine Richtigkeit. Denn das Wasser schlängelt sich zwischen den Schaufeln, gleitet unter ihnen durch, schließt sich wieder zwischen ihnen, und verlieret nicht alle seine Geschwindigkeit durch den Stoß, so daß die Wirkung sich vermuthlich nicht bloß an der vorderen Schaufel und an den unbedeckten Theilen der übrigen, sondern auch mehr oder weniger an den bedeckten Theilen äußert. Ist nun dieses, so kann die Wirkung größer werden, wenn mehr Schaufeln zugleich im Wasser sind, wenn sie nur nicht so nahe an einander sind, daß das Wasser sich nicht frei genug zwischen ihnen bewegen könne. Aus diesen Betrachtungen folget, daß sich aus der bloßen Theorie die Anzahl der Schaufeln nicht bestimmen läßt, sondern daß die Erfahrung und die Umstände zu Rathe gezogen werden müssen. Ich muthmaße, daß man wohl $1\frac{1}{2}$ mal oder wohl gar 2 mal so viel Schaufeln anbringen kann, als aus der angeführten Rechnung herauskommen. Anstatt also die Hälfte des eingetauchten Bogens zur Entfernung der Schaufeln zu nehmen, kann man vielleicht den dritten oder vierten Theil gebrauchen. Wenn also der eingetauchte Bogen 36 Grad beträgt, so würde die Entfernung der Schaufeln 12 oder 9 Grad, und ihre Anzahl 30 oder 40 betragen.

§. 7.

Wären die Schaufeln unendlich dünne und ohne Schwere, so müßte man deren je mehr je besser anbringen. Da sie aber schwer sind, und da ihr äußerer Rand, der im äußern Zirkel lieget, nichts zur Bewegung des Rades beiträgt, so muß ihre Anzahl eingeschränket werden. Bei der eben jetzt vorgeschlagenen Einrichtung wären immer vier oder wenigstens drei Schaufeln im Wasser, welches mir weder zu viel noch zu wenig zu sein scheinet.

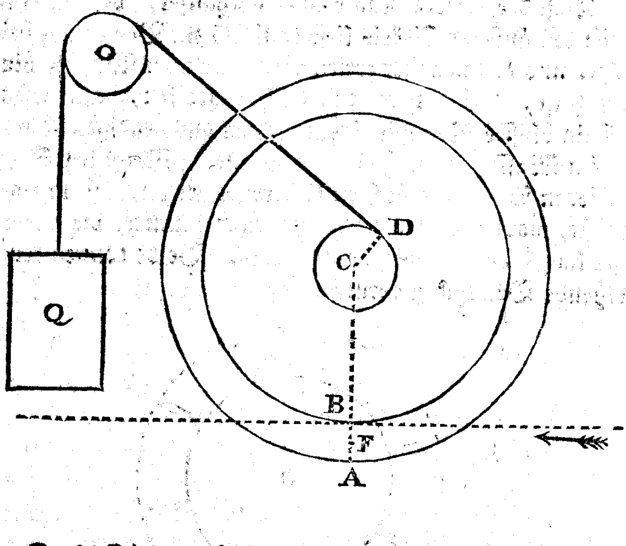
Daß der äußere Rand einer Schaufel, der im Umkreise des äußeren Zirkels lieget, nichts zur Bewegung beiträgt, und vielmehr der freien Bewegung des Wassers hinderlich ist, läßt sich eben so leicht begreifen, als dieses, daß ein bloßes Rad mit einem glatten auswendigen Rande sich im Wasser gar nicht drehen würde. Denn der Stoß auf jeden Punkt des äußern Umkreises zerleget sich in zwei Kräfte, wovon die eine nach dem Mittelpunkte, die andere aber längs der Tangente gerichtet ist. Beide können keine drehende Bewegung verursachen.



Um also die schädlichen Rände zu vermeiden, muß man die Schaufeln so dünn machen, als es nur die Festigkeit erlauben will. Auch glaube ich, daß es vortheilhaft wäre, die äußern Rände schief abzustoßen, so daß die größere Seite dem Strome entgegen gekehret wäre, wie in vorhergehender Figur.

§. 8.

Wir haben gesehen (§. 3) daß die Kraft eines Wasserrades geschätzet werden kann, vermöge des Gewichtes und der Geschwindigkeit einer Last, die an einem Seile gebunden ist, das sich um den Wellbaum herumwickelt. Wir wollen jetzt die Größe dieser Kraft genauer untersuchen.



Es sei BA eine Schaufel in vertikaler Lage, und deren Oberfläche sei A. Wenn nun eine hinlängliche Anzahl Schaufeln vorhanden ist, so wird der Stoß des Wassers

Wassers nach der Theorie (§. 6) immer ohngefähr so viel betragen, als wenn es beständig gegen eine Fläche wie AB wirkete. In der That wird wohl der Stoß stärker sein.

Die gestoßene Fläche A ist aber nicht in Ruhe, indem sich das Rad einförmig drehet, sondern sie hat eine gewisse Geschwindigkeit, welche wegen der Reibungen, und wegen der Last, die durch die Maschine beweget wird, kleiner ist, als die Geschwindigkeit des Wassers. Der Stoß geschiehet eben deswegen, weil das Wasser geschwinder gehet, als die Fläche A, und geschiehet eben so als wenn diese Fläche ruhete, das Wasser aber sich mit einer Geschwindigkeit bewegete, welche dem Unterschiede zwischen beiden Geschwindigkeiten des Wassers und der gestoßenen Fläche gleich wäre (Hauptst. IV, §. 4). Ein solcher Stoß aber beträgt wiederum in jedem Augenblicke so viel, als das Gewicht einer Wassersäule, die A zur Grundfläche hat, und deren Höhe der Geschwindigkeit $V - u$ entspricht (Hauptstück IV, §. 6), wenn V die Geschwindigkeit des Wassers, und u die Geschwindigkeit der Schaufel bedeutet. Diese Höhe ist $\frac{(V - u)^2}{2p}$, wo p die doppelte Höhe des Falles während der ersten Sekunde ist. Also ist der Kubik-Inhalt der gedachten Säule $\frac{A(V-u)^2}{2p}$, und wenn d das Gewicht jedes Kubikfußes Wassers ist, so ist das Gewicht der Säule $\frac{dA\ (V - u)^2}{2p}$, und dieses ist zugleich der Druck des Wassers gegen die Fläche A.

Der Mittelpunkt des Stoßes sei in F, so wird der Punkt F nicht weit vom Schwerpunkte der Fläche AB liegen (Hauptst. IV, §. 14, Zus. III). Eigentlich liegt er etwas höher als der Schwerpunkt, wenn man annimmt, daß das Wasser in allen seinen Punkten eine gleiche Geschwindigschwindigkeit hat. Da aber nach der Theorie, die unteren Wassertheilchen schneller fließen als die oberen (H. V, §. 15), so bringet dieses den Stoßpunkt wieder etwas herunter, so daß man ihn um desto sicherer mit dem Schwerpunkte verwechseln kann.

Es sei also CF $= b$, so ist das Moment des Drukkes in Rücksicht auf die Axe C

$$\frac{d. A. (V - u)^2 b}{2p}$$

die Geschwindigkeit u gehöret eigentlich dem Stoßpunkte F.

Es sei Q die Last, welche durch das Wasserrad gehoben wird, c der Halbmesser CD der Welle, so ist Q. c das Moment des Gewichtes Q in Rücksicht auf die Axe.

Da jede Bewegung von Natur einförmig ist, so würde das Rad, wenn es einmal eine gewisse Geschwindigkeit u hätte und keine Hindernisse vorfielen, dieselbe von selbst unverändert behalten. Diese Geschwindigkeit u behält das Rad noch alsdann, wenn es, nachdem es dieselbe erhalten hat, beständig von zwei gleichen oder entgegengesetzten Kräften gereizet wird.

Solche zwei Kräfte sind hier wirklich vorhanden, nämlich der Stoß des Wassers, und das Gewicht. Nämlich, man stellet sich vor, das Rad sei zu einer einförmigen Bewegung gelanget, bei welcher der Punkt F die Geschwindigkeit u hat. Diese Geschwindigkeit würde zunehmen, wenn der Stoß des Wassers allein wirkete. Hingegen wirket das Gewicht in entgegengesetzter Richtung, und hält dem Stoße den das Wasser, vermöge seiner horizontalen Geschwindigkeit ausübet, das Gleichgewicht. Also erfordert die Fortdauer der Geschwindigkeit u, daß

$$\frac{d. A. (V - u)^2 b}{2p} = Q. c$$

Wollen

Wollen wir die Geschwindigkeit des Gewichtes Q in die Formel hineinbringen, so sei sie v; es ist aber

$$v : u :: c . b,$$

$$\text{oder } v = \frac{cu}{b}$$

MultiplIziret man demnach das erste Glied mit $\frac{cu}{b}$ und das andere mit der gleichen Größe v, so kömmt

$$\frac{d. \text{ A. } (\text{V} - u)^2 . \ b}{2p} . \frac{cu}{b} = \text{Q}vc$$

$$\text{oder } \frac{d. \text{ A. } (\text{V} - u)^2 . \ u}{2p} = \text{Q}v$$

Dieses Qv bestimmet die wahre Kraft oder Wirkung der Maschine (§. 3).

Man siehet aus dem ersten Gliede der Gleichung, daß die Größe dieser Wirkung von der Dichtigkeit d des Flüssigen, der Größe A der Schaufeln, der Fallkraft $2p$ und den Geschwindigkeiten V und u des Wassers und des Rades abhängt.

Gesetzet aber es sei sonst alles einerlei, nämlich es bleiben d, A, b, p unverändert, es seien aber V und u bei zwei verschiedenen Kunsträdern, oder bei dem nämlich Rade in verschiedenen Umständen nicht einerlei, so nimmt die Kraft in Verhältniß mit $(\text{V} - u)^2 \ u$ ab oder zu.

Laßt uns noch annehmen, es bleibe V unverändert und es verändere sich nur u, so wird die Kraft am größten, wenn $(\text{V} - u)^2 \ u$ am größten wird. Man differenzire diese Funkzion von u, und setze das Differenzial $= 0$, so kömmt

$$0 = (\text{V} - u)^2 . \ du - 2 (\text{V} - u) \ udu.$$

Man dividire beiderseits durch $(V - u)\,du$, so hat man

$$o = V - u - 2u$$
$$o = V - 3u$$
$$3u = V$$
$$u = \tfrac{1}{3}V$$

Woraus man siehet, daß, wenn sonst alles einerlei bleibet, die Wirkung am größten wird, wenn die Geschwindigkeit des Stoßpunktes den dritten Theil der Geschwindigkeit des Wassers beträgt.

Da nun die Kraft des Wassers im Beharrungs-Zustande, oder wenn die Bewegung einförmig geworden ist, der entgegengesetzten Kraft des Gewichtes gleich ist, so ist

$$Qv$$

am größten, wenn $u = \tfrac{1}{3}V$. Ausser dem Widerstande der Last, hat die Maschine noch die Reibungen zu überwinden. Wir wollen annehmen, der aus den Reibungen entstehende Widerstand sei unveränderlich, und sein Moment $= R$, so ist die gegen die Kraft des Wassers wirkende Kraft eigentlich

$$R + Qv$$

aber auch diese Summe ist am größten, wenn Qv am größten ist.

Ferner kann die Geschwindigkeit aus der Anzahl der Umdrehungen der Welle in einer gegebenen Zeit beurtheilet werden. Also ist die Kraft am größten, wenn das größte Produkt herauskömmt, indem man das am Seile angehängte Gewicht mit der Anzahl der Umwendungen der Welle oder des Rades in einer gegebenen Zeit, z. E. in einer Minute multipliziret. Wird immer das nämliche Gewicht gebrauchet, so ist die Kraft am größten, wenn u und folglich die Anzahl der Umwendungen in einer gegebenen Zeit am größten ist.

§. 9.

§. 9.

Da also bei der größten Wirkung die Geschwindigkeit der Schaufeln $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Wassers ist, so stößt das Wasser gegen die Schaufeln nur mit $\frac{2}{3}$ seiner Geschwindigkeit $= \frac{2}{3}$ V, oder es wirket eben so, als wenn das Rad befestiget und unbeweglich wäre, und das Wasser nur $\frac{2}{3}$ seiner wirklichen Geschwindigkeit hätte. Man setze nun auch den Fall, daß das Rad ebenfalls befestiget und unbeweglich sei, daß aber das Wasser seine wirkliche Geschwindigkeit V habe, so verhalten sich die Stöße wie die Quadrate der Geschwindigkeiten (H. IV, §. 1, Zus. I), also ist der Stoß im ersten Falle zum Stoße im zweiten Falle wie $(\frac{2}{3} V^2)$ zu V^2, oder wie $\frac{4}{9} V^2$ zu V^2, oder wie $\frac{4}{9}$ zu 1. Das heißt, im Falle der größten Wirkung beträgt der Stoß des Wassers nur $\frac{4}{9}$ desjenigen Stoßes, welchen die Schaufeln empfangen würden, wenn das Rad unbeweglich wäre. Folglich kann das Rad, bei seiner größten Wirkung, auch nur $\frac{4}{9}$ desjenigen Gewichtes heben, welches nöthig wäre, um es gänzlich anzuhalten, oder um der Wirkung des Stromes das Gleichgewicht zu halten.

§. 10.

Setzet man $\frac{2}{3}$ V anstatt u in dem Ausdrucke der Kraft

$$\frac{d.\ A.\ (V - u)^2.\ u.\ b.}{2p}$$

so kömmt $\frac{d.\ A.\ \frac{4}{27} V^3.\ b}{2p}$

oder $\frac{4}{27} V.\ b.\ \left(\frac{d.\ A.\ V^2}{2p}\right)$

Nun ist $\frac{d.\ A.\ V^2}{2p}$ in jedem Augenblicke der senkrechte Druck des Wassers, welches die Geschwindigkeit V hat.

Denn,

Denn, wenn h die der Geschwindigkeit V entsprechende Höhe ist, so beträgt der gedachte Druck eigentlich $d.\ A.\ h$ (Hauptst. IV, §. 6). Es ist aber $h = \frac{V^2}{2p}$, vermöge der Dynamik, also ist $d.\ A.\ h = \frac{d.\ A.\ V^2}{2p}$. Dieser Ausdruck bedeutet eigentlich das Gewicht einer Wassersäule, welche A zur Grundfläche und h zur Höhe hat. Folglich zeiget $\frac{4}{27}$ V. $b \left(\frac{d.\ A.\ V^2}{2p}\right)$ das Moment eines solchen Gewichtes, wenn es sich mit der Geschwindigkeit $\frac{4}{27}$ V beweget, und b der Hebels-Arm ist, wodurch das Gewicht wirket.

Also beträgt die Kraft des Rades so viel als nöthig ist, um die gemeldete Wassersäule oder ein Gewicht das ihr gleich ist, und welches in der Entfernung b vom Mittelpunkte des Rades angebracht ist, mit einer Geschwindigkeit zu bewegen, die $\frac{4}{27}$ der Geschwindigkeit des Wassers beträgt.

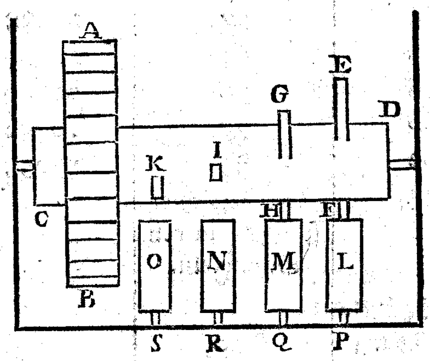
§. 11.

Aus allem diesem siehet man, daß sich von einem unterschlächtigen Wasserrade keine größere Wirkung erwarten läßt, als die eben jetzt bestimmte, und daß diese Statt findet, wenn die Maschine so eingerichtet ist, daß die Geschwindigkeit des Druckpunktes jeder Schaufel $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Stromes beträgt, oder daß das zu hebende Gewicht $\frac{4}{9}$ desjenigen Gewichtes beträgt, welches hinlänglich wäre, um das Rad ganz aufzuhalten. Und wenn die Last oder Resistenz gegeben ist, so muß die Größe der Schaufeln und überhaupt die ganze Einrichtung so getroffen werden, daß gedachte Bedingungen Statt finden.

§. 12.

§. 12.

Indessen, da die angeführten Berechnungen auf Hypothesen beruhen, worüber mancher Zweifel erreget werden könnte, so muß noch weiter untersucht werden, ob und in wie fern die Resultate mit der Erfahrung übereinstimmen. Versuche die sich hierauf beziehen, findet man in den Institutions Physico-Méchaniques des Herrn von Antoni, und in des Herrn Bossüt Traité élémentaire d'Hydrodynamique.



Hr. Antoni gebrauchete ein Wasserrad AB mit einem dikken Wellbaume CD. Durch diesen gingen Querstangen EF, GH, I, K. Diese griffen nach und nach die Enden gewisser länglicher Kasten L, M, N, O, welche an den andern Enden sich in Scharniren P, Q, R, S bewegeten. Diese Kasten wurden auf diese Art etwas gehoben, wenn das Rad sich drehete, fielen aber bald wieder in ihre horizontale Lage. In die Kasten wurden verschiedene Gewichte geleget, um Versuche mit größern und kleinern Resistenzen zu machen.

Nun wurden Versuche gemacht, welche folgende Resultate gaben.

Bei

Beladung in Denaren.	Umwendungen des Rades in einer Minute.	Produkte beider Zahlen.
864	stehet still.	
768	unregelmäßige Bewegung.	
600	20	12000
480	40	19200
432	49	21168
384	57	21888
336	64	21504
298	70	20860
266	77	20482
192	89	17088
144	die Gewichte springen in den Schachteln.	
ohne Schachteln und Beladung	150	
die Reibung abgerechnet.	170	

Diese letzte Zahl ist gefunden worden, indem man berechnete, wie vielmal das Rad sich in einer Minute umdrehen würde, wenn die Schaufeln sich mit der Geschwindigkeit des Wassers bewegten.

Man siehet aus dieser Tabelle, daß das größte Produkt (§. 8 am Ende) entstehet, wenn die Beladung 384 ist, und daß dann die Geschwindigkeit 57 beträgt. Nun ist 57 ohngefähr $\frac{1}{3}$ von 170, als der Geschwindigkeit des Wassers. Also findet hier die größte Wirkung Statt, wenn die Geschwindigkeit der Schaufeln $\frac{1}{3}$ der Ge-

Geschwindigkeit des Wassers beträgt. Ferner sind 384 genau $\frac{4}{9}$ von 864, also beträgt bei der größten Wirkung das Gewicht $\frac{4}{9}$ desjenigen, welches das Rad unbeweglich erhält.

Folglich stimmen die Versuche des Herrn Antoni mehr als man erwarten sollte, mit der Theorie. Sein Rad war von Messing, hatte $7\frac{1}{2}$ liprandische Zolle im Durchmesser, war mit 22 Schaufeln versehen, und wog $5\frac{1}{3}$ liprandische Pfund. Eine andere Reihe von Versuchen mit demselbigen Rade gab ganz ähnliche Resultate.

§. 13.

Die Versuche des Herrn Bossüt geben Resultate, die ziemlich stark von der obigen Theorie abweichen. Herr Bossüt gebrauchte ein Rad von Eisenblech, welches 3 Fuß im Durchmesser und 24 Schaufeln hatte. Die Einrichtung war wie in der obigen Figur, Seite 166. Es wurden nach und nach verschiedene Gewichte an dem Seile gehängt, welches sich um den Wellbaum wickelte, und jedesmal die Anzahl der Umwendungen während 40 Sekunden gezählet. Hier folget eine Reihe solcher Versuche. Die Brüche in den Anzahlen der Umwendungen hat Herr Bossüt vermittelst einer Art von Uhrwerk erhalten, welches vom Wellbaume in Bewegung gesetzt wurde.

Last in franz. Pfunden.	Anzahl der Umdrehungen.	Produkt beider Zahlen.
$30\frac{1}{2}$	$22\frac{12}{48}$	$678\frac{30}{48}$
31	$22\frac{4}{48}$	$684\frac{28}{48}$
$31\frac{1}{2}$	$21\frac{42}{48}$	$689\frac{3}{48}$
32	$21\frac{32}{48}$	$693\frac{16}{48}$
$32\frac{1}{2}$	$21\frac{20}{48}$	$696\frac{2}{48}$
33	$21\frac{8}{48}$	$698\frac{24}{48}$

$33\frac{1}{2}$

Last in franz. Pfunden.	Anzahl der Umdrehungen.	Produkt beider Zahlen.
$33\frac{1}{2}$	$20\frac{44}{48}$	$700\frac{34}{48}$
34	$20\frac{32}{48}$	$702\frac{32}{48}$
$34\frac{1}{2}$	$20\frac{21}{48}$	$705\frac{3}{32}$
35	$19\frac{44}{48}$	$697\frac{44}{48}$
$35\frac{1}{2}$	$19\frac{15}{48}$	$685\frac{19}{32}$
36	$18\frac{28}{48}$	669

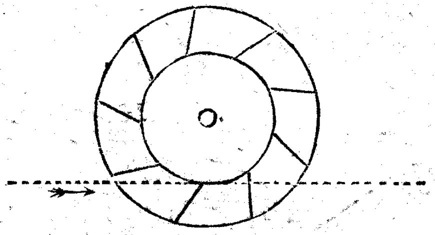
Hier siehet man, daß die größte Wirkung Statt findet, wenn das Rad sich $20\frac{7}{16}$ mal in 40 Sekunden, umdrehet, und daß alsdann die Last $34\frac{1}{2}$ Pfund beträgt. Aus der bekannten Geschwindigkeit des Wassers, und der bekannten Lage des Stoßpunktes findet Herr Bossüt, daß die Geschwindigkeit des Wassers sich zur Geschwindigkeit des Stoßpunktes verhielt wie 5334 zu 2183, oder in kleinen Zahlen ohngefähr wie 5 zu 2. Hier war also bei der größten Wirkung die Geschwindigkeit der Schaufeln nicht $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Wassers, sondern ohngefähr $\frac{2}{5}$ oder zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$. Bei einer andern Reihe von Versuchen fand Herr Bossüt ebenfalls, daß die größte Kraft eintraf, wenn die Geschwindigkeit des Stoßpunktes ohngefähr $\frac{2}{5}$ der Geschwindigkeit des Wassers betrug.

Man siehet demnach, daß die Regel, vermöge welcher die größte Wirkung des Wasserrades erfolgen soll, wenn der Stoßpunkt sich mit $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Wassers beweget, nicht allemal von der Erfahrung bestätiget wird. Es muß hierbei auf gewisse Umstände ankommen, die in der Theorie nicht in Anschlag gebracht worden, z. E. auf die Anzahl der Schaufeln, die zugleich vom Wasser gestoßen werden. Man sehe, was hierüber oben §. 6 gesaget worden.

§. 14.

§. 14.

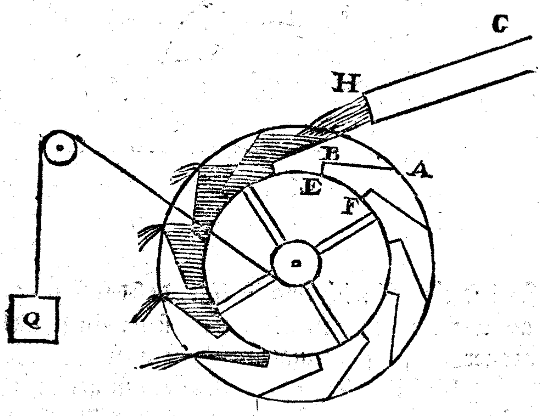
Man siehet manchmal unterschlächtige Wasserräder, deren Schaufeln nicht senkrecht auf dem Umkreise des Rades stehen, sondern gegen denselben geneiget sind, so daß der äußere Rand der Schaufel, wenn sie im Wasser ist, dem Ursprunge des Wassers etwas näher ist als der innere Rand, wie die folgende Figur zeiget.



Bei solcher Einrichtung ist klar, daß der Stoß geringer ist, als wenn dieselbigen Schaufeln senkrecht ständen, indem der gerade Stoß allemal am stärksten ist. Indessen können doch solche schiefliegende Schaufeln in gewissen Fällen einen Vorzug haben. Denn, wenn das Wasser viel geschwinder gehet, als der Umfang des Rades, so steiget es zum Theil längs der Schaufel hinauf, wie auf eine schiefe Ebne, und wirket etwas durch seine Schwere. Diese Wirkung der Schwere kann, nach Umständen, den Verlust der aus den Schaufeln entstehet, ersetzen, oder wohl gar übertreffen. In einem horizontalen und breiten Strome thun die senkrechten Schaufeln bessere Wirkung. Hingegen in Kanälen, welche eine starke Neigung haben, und nicht sehr breit sind, sind schiefliegende Schaufeln nicht zu verwerfen, weil hier das Wasser nicht so leicht allerseits abfließen kann, und durch solche Schaufeln mehr zurück gehalten wird, und durch sein Gewicht wirket. Herr Bossüt hat bei einigen Versuchen gefunden, daß in solchen Kanälen eine Neigung von 15 bis 30 Graden, entweder eben so viel oder mehr Wirkung thut, als die senkrechte Lage der Schaufeln.

§. 15.

Wir schreiten jetzt zu den oberschlächtigen Wasserrädern.



Ein solches Rad hat an seinem Umfange, anstatt bloßer Schaufeln, solche Kasten oder Zellen wie ABEF. Die Wände dieser Kasten bestehen 1) aus einem breiten zylindrischen Ringe, welcher den inneren Umfang des Rades ausmachet; 2) aus zwei platten Ringen, welche sich an jenem anschließen, mit einander parallel sind, und die Seitenwände der Kasten abgeben; 3) aus solchen Schaufeln oder Brettern wie ABE, welche die übrigen Wände der Kasten abgeben, und zwischen den beiden parallelen breiten Ringen befestiget sind.

Das

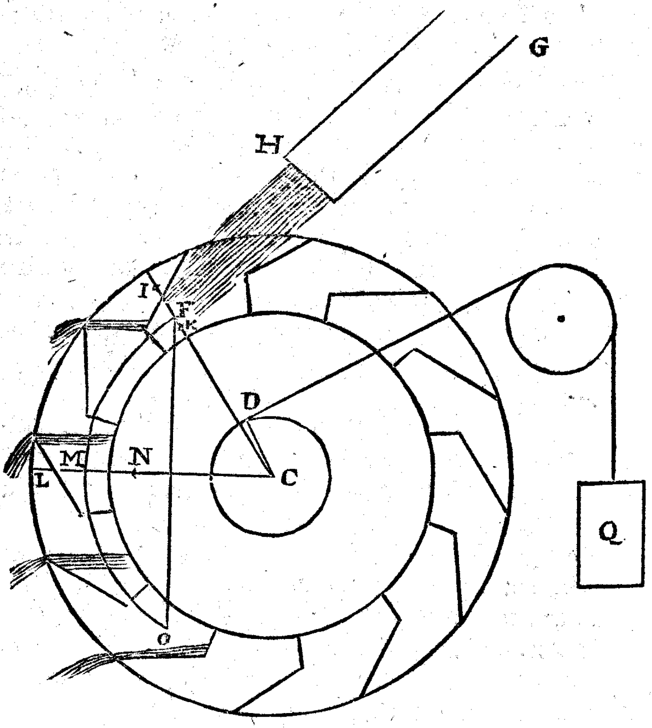
Das Wasser wird durch einen Kanal GH herbeigeführet, und füllet nach und nach die Zellen auf der einen Seite des Rades, indem sich das Rad theils durch den Stoß des Wassers, theils durch das Gewicht der schon gefüllten Zellen drehet. Wenn die Kasten herunter kommen, neigen sich ihre Mündungen seitwärts, sie ergießen das Wasser welches sie enthielten, und steigen dann leer auf der andern Seite des Rades, bis daß sie wieder unter die Mündung des Kanals gekommen sind, und sich von neuen anfüllen. Folglich bleibet das Gewicht des Wassers allemal auf einer Seite, und da es kein Gegengewicht hat, so wirket es beständig nebst dem Stoße zur Umdrehung des Rades.

Wenn ein solches Rad zu Versuchen gebrauchet wird, so wird ein Gewicht Q angebracht, das an einem Seile hänget, welches sich um den Wellbaum wickelt, wie schon oben angezeiget worden (§. 3 und §. 8).

Bringet man die Maschine in Bewegung, so beschleuniget sich anfänglich diese Bewegung. Nach einigen Umdrehungen aber wird sie einförmig, und in diesem Zustande der Einförmigkeit pfleget man sie zu betrachten. Alsdann darf man sich nur vorstellen, daß das Rad sich mit der schon erhaltenen Geschwindigkeit von selbst drehet, und daß zugleich zwei entgegengesetzte Kräfte darauf wirken, die aber gleich stark sind, so daß sie einander aufheben, oder sich einander in Gleichgewicht halten. Die eine Kraft ist die des Wassers, welches durch sein Gewicht und durch den Stoß wirket. Die andere ist die Kraft, welche die Last durch ihre Schwere ausübet.

§. 16.

Es werde eine Fläche CI (folg. Fig.) in Gedanken durch die Axe des Rades und die Gegend wo der Stoß geschiehet, geführet, so wird die Richtung des Stoßes des Wassers gegen diese CI auf verschiedene Art geneiget sein.



Denn erstlich wird wohl schwerlich die Richtung des Wasserstrals selbst gegen CI senkrecht gemacht werden können, zweitens sind die Wände der Kasten oder Zellen auf verschiedene Art gegen die Richtung des Wassers geneiget, und drittens sprudelt das einfallende Wasser in dem Kasten, so daß die eigentliche Richtung des Stoßes sich nicht bestimmen läßt. Jedoch können wir in der Ebne CI eine gewisse Fläche IK annehmen, von der Größe, daß, wenn der Stoß gegen diese Fläche senkrecht geschähe, er eben die Kraft haben würde, die er wirklich hat. Den Stoßpunkt F wollen wir in der Mitte des Wasserstrals annehmen (Hauptst. IV, §. 14, Zus. III).

Es

Es sei nun die Fläche IK = A, CF = b; die Geschwindigkeit des Rades in der Entfernung CF vom Mittelpunkte = u, die Geschwindigkeit des Wassers da wo es an die Kasten stößt, = V; die Dichtigkeit des Wassers = d; die doppelte Höhe des Falles in einer Sekunde = p: so wurde bei unterschlächtigen Wasserrädern bewiesen, daß das Moment des Stoßes folgende Größe beträgt (§. 8).

$$\frac{d.\ A.\ (V - u)^2\ b}{2p}$$

Indessen, da hier der Fall eintrift, daß jenseit des Kastens kein ruhendes Wasser ist, welches der Bewegung widerstehet, so kann man wohl das Moment des Stoßes doppelt so groß annehmen (H. IV, §. 6, Anmerk. III), also wird es sein

$$\frac{d.\ A.\ (V - u)^2\ b}{p}$$

Das Wasser, welches sich beständig in den Zellen befindet, ist sehr ungleich vertheilet. Indessen wollen wir annehmen, daß die Schwerpunkte aller dieser einzelnen Wassermassen in dem Zirkelbogen FMO liegen, welcher durch die Vertikal-Linie FO begränzet ist. Ferner wollen wir uns vorstellen, daß das Wasser um den Bogen FMO herum als um eine Axe gleichförmig vertheilet werde, und ein krummes Prisma bilde, welches entstehe, wenn der Schwerpunkt einer gewissen ebnen Fläche B, sich längs dem Bogen FMO beweget, und indessen auf diesem Bogen immer senkrecht bleibet. Der Inhalt eines solchen krummen Prisma ist nach Guldins Regel B × FMO, und wenn er von Wasser ist, so ist sein Gewicht B × FMO × d. Ein solches krummes Prisma, welches allenthalben einerlei Dicke hat, anstatt des wirklich in den Kasten enthaltenen Wassers zu substituiren, ist deswegen erlaubt, weil das Wasser was in einem Kasten unterhalb des horizontalen Halbmessers CL mangelt, in einem andern gerade über ihn und oberhalb desselbigem Halbmessers gelegenen Kasten zu viel ist. Da nun zwei solche Kasten allemal gleich weit von der Vertikal-Linie, die durch C gehet, entfernet sind, so ist es, in Betreff des Moments einerlei, wenn man die Summe ihrer Wässer unter beiden gleich vertheilet. Durch solche Vertheilungen wird ohngefähr gleich viel Wasser in alle Kasten kommen, und die ganze Masse wird sich in das gedachte krumme Prisma verwandeln lassen.

Es sei nun N der Schwerpunkt des krummen Prisma, so lehret die Statik, daß FMO : FO :: CM : CN, folglich

$$CN = \frac{FO \times CM}{FMO}$$

Folglich ist das Moment der Wassermasse, welche im krummen Prisma, oder eigentlich in den Kasten enthalten ist

$$B \times FMO \times d \times \frac{FO \times CM}{FMO}$$

$$\text{oder } B \times d \times FO \times CM$$
$$\text{oder } B \times d \times FO \times b$$

Dieses Moment, welches aus der Schwere des Wassers entstehet, muß zu dem Momente des Stoßes hinzugethan werden; alsdann hat man die Summe der Momente der Kräfte, die sich bestreben das Rad zu drehen, nämlich

$$\frac{d \times A \times (V - u)^2 \times b}{p} + B \times d \times FD \times b$$

Diese Summe muß gleich sein dem Momente des Gewichtes Q, nämlich $Q \times CD$ oder $Q \times c$,

also

also ist

$$\frac{d.\,A.\,(V - u)^2\;b}{p} + B.\,d.\,FD.\,b = Q.\,c$$

Man multiplizire das zweite Glied mit v und das erste mit $\frac{cu}{b}$ $(= v)$ und lasse das c aus allen Sätzen weg, so kömmt

$$\frac{d.\,A.\,(V - u)^2.\;u}{p.} + B.\,d.\,FD.\,u = Q.\,v$$

Die Größe B, nämlich der Durchschnitt der krummen Wassersäule verändert sich mit $(V - u)$; denn je größer der Unterschied der Geschwindigkeit des Wassers und des Rades ist, oder je langsamer das Rad in Vergleich mit dem Wasser gehet, desto mehr Wasser fangen die Kasten auf; und sie können alsdann breiter gemacht werden, als der Wasserstral. Es sei für den Fall, wo $V - u = 0$, $B = C$, so läßt sich annehmen, daß in jedem andern Falle

$$B = C + n\,(V - u)$$

wo n irgend eine beständige Zahl ist, also haben wir

$$\frac{d.\,A.\,(V - u)^2\,u}{p} + [C + n\,(V - u)].\,d.\,FD.\,u = Qv$$

oder

$$\frac{d.\,A}{p}\,(V - u)^2 u + n.\,d.\,FD\,(V - u)\,u + C.\,d.\,FD.\,u = Qv$$

soll Qv ein Maximum werden, so muß auch das erste Glied ein Maximum sein. Differenziret man das erste Glied in Betreff der Größe u allein, setzet man das Differenzial $= 0$, und dividiret man alles durch du, so kömmt

$$\frac{dA}{p}(V-u)^2 - \frac{2dA}{p}u(V-u) + n.d.FD(V-u)$$

$$- n.d.FD.u + C.d.FD = 0$$

Wenn man was in den Paranthesen ist entwickelt, so bekömmt man eine Gleichung vom zweiten Grade, woraus derjenige Werth von u gefunden wird, bei welchem die Wirkung der Maschine am größten wird.

Man siehet, daß diese Geschwindigkeit wobei die Wirkung ein Maximum wird, hier nicht so leicht zu bestimmen ist, als bei unterschlächtigen Rädern (§. 8). Hierzu kömmt noch die Schwierigkeit, die Größen C und n zu bestimmen.

§. 17.

Obgleich die genaue Bestimmung der Wirkung eines oberschlächtigen Rades vielen Schwierigkeiten unterworfen ist, so siehet man doch deutlich genug, daß bei gleichem Durchschnitte des Wasserstrals, bei gleicher Geschwindigkeit des Wassers und des Rades und bei gleichen Durchmessern der Räder, ein oberschlächtiges Rad mehr Wirkung thut, als ein unterschlächtiges. Denn die Wirkung des unterschlächtigen ist nur, wenn die Schaufeln des unterschlächtigen der in dem oberschlächtigen angenommenen Fläche A gleich sind (§. 8).

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\,A\,(V-u)^2\,u}{p}$$

die Wirkung des oberschlächtigen ist aber (§. 16)

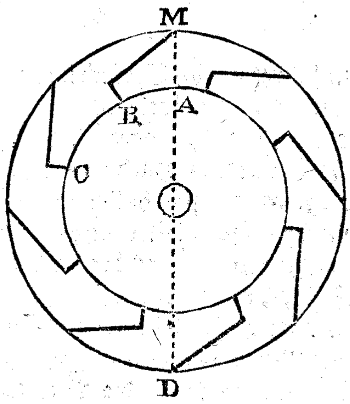
$$\frac{d.A.\,(V-u)^2\,u}{p} + B.\,d.\,FD.\,u$$

Wenn es also die Umstände zulassen, daß man das Wasser über das Rad hinleite, so wird es besser sein, ein

ein oberschlächtiges als ein unterschlächtiges zu gebrauchen. Hauptsächlich muß man seine Zuflucht zu oberschlächtigen Rädern nehmen, wenn man nur wenig Wasser hat; denn so gewinnet man nicht nur, daß der Stoß stärker wird, sondern auch, daß das Gewicht des Wassers zur Umdrehung des Rades mitwirket.

§. 18.

Folgende Verhältnisse sind bei der Einrichtung eines Wasserrades, durch die Erfahrung als vortheilhaft erkannt worden.



Zur Tiefe AM der Zellen nimmt man $\frac{2}{15}$ des Durchmessers DM. Ihre Breite, auf der Ebene des Rades senkrecht, beträgt gemeiniglich ebenfalls $\frac{2}{15}$ des Durchmessers. Jedoch kann diese Breite, wenn die Menge des zuströmenden Wassers es erfordert, und wenn die Stärke der Maschine es zuläßt, bis zu $\frac{4}{15}$ des Durchmessers vergrößert werden. Die Entfernung BC der Abtheilungen von einander beträgt 12 Grad, so daß das Rad mit 30 Kasten versehen ist. Jedoch kann man auch weniger Kasten anbringen, und sie weiter auseinander setzen, wenn ihre Breite mehr als $\frac{2}{15}$ des Durchmessers beträgt. Die Bretter welche die Abtheilungen machen, müssen eine hinlängliche Neigung haben, um daß die Zellen nicht eher ganz leer werden, als wenn sie schon unten der Vertikal-Linie, die durch den Mittelpunkt des Rades gehet, ziemlich nahe sind. Unterhalb des Rades muß Platz übrig sein, und das Wasser muß einen gehörigen Abfluß haben; sonst würde das gesammlete Wasser bis an das Rad reichen, und dessen Bewegung verhindern.

§. 19.

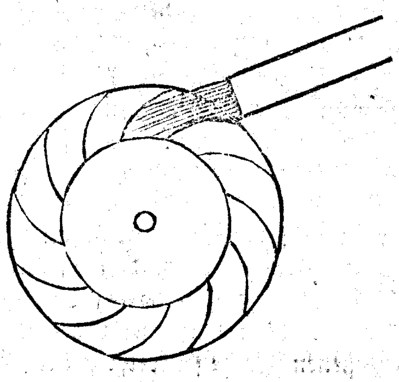
Herr Antoni führet einige Versuche mit oberschlächtigen Wasserrädern an, bei welchen die vortheilhafteste Geschwindigkeit des Rades, oder eigentlich des Stoßpunktes zwischen $\frac{5}{16}$ und die Hälfte der Geschwindigkeit des Wassers betrug. Hr. Bossüt hat durch andere Versuche gefunden, daß die zur größten Wirkung gehörige Geschwindigkeit, sich zu derjenigen die das Rad bekommen würde, wenn es ohne Last ginge, wie 1 zu 5 verhält. Man siehet, wie viel Ungewißheit noch in der Theorie und in den Versuchen, welche diese Räder betreffen, herrschet. Zugleich siehet man, wie unzuverläßig die Meinung derer ist, welche behaupten, die vortheilhafteste Einrichtung sei diejenige, wo die Geschwindigkeit der Kasten der Geschwindigkeit des Wassers gleich ist, oder wo $V - u = 0$, in welchem Falle das Gewicht des Wassers allein ohne den Stoß des Wassers wirket. Dieser Fall würde eintreten, wenn man an der Welle ein Gewicht von solcher Größe anhinge, daß das Produkt aus ihm und dem Halbmesser der Welle, gleich wäre dem Produkte aus dem in den Zellen befindlichen Wasser und der Entfernung des gemeinsamen

Schwer-

Schwerpunktes dieses Wassers von einer vertikalen Ebne die durch die Axe des Wellbaumes gehet. Alsdann würde das Wasser durch die Last beständig in Gleichgewicht gehalten werden, und das Rad würde bald, eben so als wenn es ganz frei wäre, die ganze Geschwindigkeit des Wassers erhalten (vorausgesetzet, daß der Stoß desselben senkrecht geschähe), oder wenigstens die dem schiefen Stoße zukommende relative Geschwindigkeit.

§. 20.

Es giebt Räder, die von einigen **mittelschlächtige Räder** genannt werden, weil das Wasser ohngefähr in der Gegend des horizontalen Durchmessers des Rades in die Kasten fällt.



Was den Stoß des Wassers betrift, so haben sie denselbigen Vorzug als die gewöhnlichen oberschlächtigen Räder. Aber das Gewicht des Wassers wirket dabei weniger, weil die Kasten nicht so voll sind, auch weniger Kasten zugleich Wasser enthalten.

§. 21.

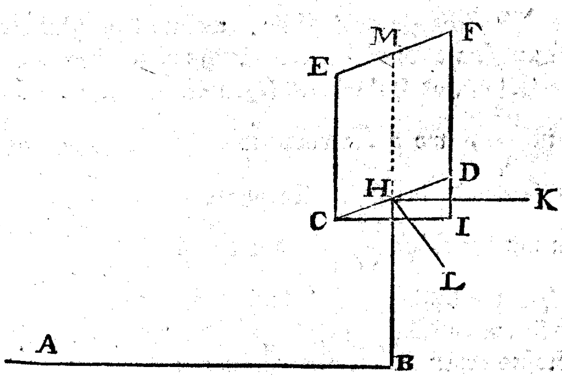
Von den Wasserrädern kommen wir auf die Windflügel, welche ohngefähr von derselbigen Theorie abhängen. Ich nenne Windflügel eine Fläche, worauf der Wind in schiefer Richtung wirket, und welche an einem Wellbaume befestiget ist, der nicht aus seiner Lage weichen kann, der in der Richtung des Windes lieget, und der gezwungen ist sich zu drehen, wenn der Wind auf den Flügel wirket. Dergleichen Flügel siehet man an den Windmühlen.

Da der Wind in schiefer Richtung an den Flügel stößt, so wäre, zur genauen Bestimmug der Wirkung nöthig zu wissen, wie die Wirkung einer Flüssigkeit auf eine Ebne von dem Einfalls-Winkel abhängt. Da man aber über diesen Gegenstand noch keine befriedigende Theorie hat, so müssen wir uns an die gewöhnliche halten, und es den Beobachtern überlassen, zu entscheiden, um wie viel, und wo möglich nach welcher Analogie, sie von der Erfahrung abweichet. Es ist zu vermuthen, daß die Abweichung noch größer sein wird, als bei Wasserrädern. Denn bei diesen ist der Stoß meistens nicht so schief als bei Windflügeln, und wir haben schon bemerket, daß die Erfahrung um desto weniger mit der alten Theorie stimmet, je größer der Einfalls-Winkel ist (Hauptst. IV, §. 7, Anm. I). Ich erinnere nochmals, daß ich unter dem Einfalls-Winkel allemal denjenigen verstehe, welche die Richtungs-Linie der Flüssigkeit, mit einer andern Linie machet, die auf der gestoßenen Fläche senkrecht stehet (Hauptst. IV, §. 7, Anm. II)

§. 22.

Es sei AB (folg. Fig.) die, in der Richtung des Windes liegende Axe des Wellbaumes, BH oder BM (senkrecht auf AB) der Arm, an welchem der rechteckigte

Flügel



Flügel FC befestiget ist. Die Fläche dieses Flügels ist nicht in der Ebne des Zirkels, den der Arm BH in der Luft beschreibet auch nicht in der Ebne MBA, sondern gegen diese beide Ebnen geneiget. Da nun die Richtung KH des Windes mit AB parallel ist, so ist auch diese Richtung schief gegen die Fläche des Flügels. Es sei KHD der Winkel den die Richtung des Windes mit der Ebne des Flügels machet, so ist sein Komplement KHL der Einfalls-Winkel. (Siehe das Ende des vorigen Paragraphs).

Da die Richtung der Bewegung in der Zirkelfläche ist, welche von BM beschrieben wird, so stelle man sich den Flügel FC auf einer Ebne projektiret vor, die gegen gedachte Zirkelfläche senkrecht sei, so wird diese Projekzion die Höhe HM des Flügels haben, aber die Breite DC wird bis zur Größe CI vermindert sein, so daß DC : CI :: 1 : Cos. DCI, oder CI = DC. Cos. DCI. Es ist aber $\angle$ DCI = $\angle$ DHK = Compl. $\angle$ KHL. Also Cosin. DCI = Sin. KHL. Folglich CI = DC. Sin. KHL, oder wenn man setzet $\angle$ KHL = φ, so ist CI = DC. Sin. φ. Multipliziret man diese Breite der Projekzion mit der Höhe, so kömmt für ihren Flächen-Inhalt

$$HM.\ DC.\ Sin.\ \varphi$$

Es sei die Geschwindigkeit des Windes v, so würde der Stoß gegen die gemeldete Projekzion so viel betragen, als

als das Gewicht einer Luftsäule, welche diese Projekzion zur Grundfläche und die der Geschwindigkeit v entsprechende Höhe, zur Höhe hätte (Hauptst. IV, §. 6). Diese Höhe ist $\frac{v^2}{2p}$, wo p die doppelte Höhe des Falles in der ersten Sekunde beträgt. Wenn man demnach die Projekzion mit der Höhe $\frac{v^2}{2p}$ und mit der spezifischen Schwere d der Luft multipliziret, so bekömmt man das Gewicht der eingebildeten Luftsäule, und folglich die Kraft des senkrechten Stoßes gegen die Projekzion, nämlich

$$\frac{HM.\ DC.\ \mathrm{Sin.}\ \varphi.\ v^2.\ d}{2p}$$

Wenn man diese senkrechte Wirkung gegen die Projekzion, mit dem quadrirten Kosinus des Einfalls-Winkels multipliziret, nämlich mit $\mathrm{Cos.}\ \varphi^2$, so bekömmt man wirklich denjenige Theil der Wirkung des Windes, welcher in der Ebne, die der Arm BH beschreibet, gerichtet ist (Hauptst. IV, §. 9). Also bestrebet sich der Wind, den Flügel in dieser Richtung zu treiben, mit einer Kraft, welche ausgedrücket wird durch

$$\frac{HM.\ DC.\ d.\ v^2.\ \mathrm{Sin.}\ \varphi.\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^2}{2p}$$

Wenn in diesem Ausdrucke alles unveränderlich angenommen wird, ausgenommen der Winkel ω, so ist die Wirkung am größten, wenn $\mathrm{Cos.}\ ^2\omega.\ \mathrm{Sin.}\ \omega$ am größten wird. Man suche das Maximum durch die Differenziazion

$$-2\ \mathrm{Cos.}\ \omega.\ \mathrm{Sin.}\ ^2\omega.\ d\omega + \mathrm{Cos.}\ ^3\omega.\ d\omega = 0$$

$$-2\ \mathrm{Sin.}\ ^2\omega + \mathrm{Cos.}\ ^2\omega = 0$$

$$\mathrm{Cos.}\ ^2\omega = 2\ \mathrm{Sin.}\ ^2\omega$$

$$\tfrac{1}{2} = \frac{\mathrm{Sin.}\ ^2\omega}{\mathrm{Cos.}\ ^2\omega}$$

$$\tfrac{1}{2} = \mathrm{tang.}\ ^2\omega$$

$$-\log.\ 2 = 2\ \log.\ \mathrm{tang.}\ \omega$$

$$-\tfrac{1}{2}\ \log.\ 2 = \log.\ \mathrm{tang.}\ \omega.$$

Weil

Weil aber die Tafeln für die Logarithmen der Tangenten nicht für den Halbmesser 1, sondern auf den Halbmesser 10000000000 eingerichtet sind, so ist darin alles 10 000 000 000 mal größer, also alle Logarithmen um 10 Einheiten größer. Folglich ist, wenn man die Tafeln zur Hülfe nimmt

$$10 - \tfrac{1}{2}\log. 2 = \log.\ \mathrm{tang.}\ \omega.$$

$$10 - 0{,}1505150 = \log.\ \mathrm{tang.}\ \omega$$

$$9{,}8494850 = \log.\ \mathrm{tang.}\ \omega$$

Man findet in den Tafeln, daß dieser Logarithmus zur Tangente von 35 Grad 16 Minuten gehöret, also ist

$$\omega = 35 \text{ Grad } 16 \text{ Minuten}$$

Dieses ist der Einfalls-Winkel, der die größte Kraft giebt. Es ist zugleich die Neigung des Flügels gegen den Kreis den der Arm beschreibet. Das Komplement 54 Gr. 24 Minuten ist die Neigung der Richtung des Windes, oder auch der Axe gegen die Ebne des Flügels.

Sieben-

Siebentes Hauptstück.

Von der geradlinichten Bewegung eines festen Körpers in einem mit flüssiger Materie angefüllten Raume.

§. 1.

Wenn ein fester Körper sich in einem Raume beweget, welcher mit flüssiger Materie angefüllet ist, zum Beispiel, im Wasser oder in der Luft, so wird nicht nur seine Geschwindigkeit vermindert, sondern auch oft seine Richtuug verändert. Dieses geschiehet, wenn die Flächen des Körpers verschiedentlich gegen einander geneiget, und nicht symetrisch sind, so daß auf einer Seite mehr Widerstand entstehet, als auf der andern. Sonst aber wird die Richtung durch den Widerstand der Flüssigkeit nicht geändert. Und diesen lezteren Fall wollen wir nur betrachten, theils weil er weniger Schwierigkeiten verursachet, theils auch, weil er in praktischen Untersuchungen der gewöhnlichste ist.

Ferner ist die Bewegung an sich selbst, ohne Rücksicht auf den Widerstand, entweder geradlinicht oder krummlinicht. Im gegenwärtigen Hauptstücke betrachten wir nur die geradliniche, welche bei der angenommenen Voraussetzung auch ongeachtet des Widerstandes, geradlinicht bleiben

bleiben muß. Eine solche Bewegung entstehet entweder durch einen augenblicklichen Eindruck, wie beim Stoße, oder durch die fortgesetzte Wirkung einer beschleunigenden Kraft, wie bei fallenden Körpern. Laßt uns beide Arten im widerstehenden Mittelraume betrachten.

§. 2.

Aufgabe.

Ein zylindrischer oder prismatischer Körper, dessen Endflächen gegen die Axe des Körpers senkrecht stehen, beweget sich in der Richtung seiner Axe, in einer flüssigen Materie, nachdem er anfänglich eine gewisse Geschwindigkeit bekommen hat; es wird gefraget, welche Geschwindigkeit ihm nach einer gewissen Zeit übrig bleibet?

Es sei m die Masse des bewegten Körpers, v seine Geschwindigkeit nach Verfließung einer Zeit t, s die vordere Basis, welche allein den Widestand leidet (Hauptst. IV, §. 10), d die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so beträgt der Widerstand in der Einheit der Zeit (wenn die flüssige Materie unelastisch ist)

$$adsv^2$$

wo a eine Zahl ist, die durch die Erfahrung bestimmet werden muß (Hauptst. IV, §. 1, Zus. II). In einer unendlich-kleinen Zeit dt beträgt also der Widerstand

$$adsv^2\,dt$$

und so viel Bewegung verlieret der feste Körper in dieser kurzen Zeit dt.

Theilet man diese verlorne Bewegung durch die Masse des Körpers, so hat man die verlorne Geschwindigkeit, nämlich

$$\frac{adsv^2\,dt}{m}$$

Dieses ist demnach die Abnahme der Geschwindigkeit, oder das negative Differenzial derselben. Folglich haben wir

$$\frac{adsv^2 dt}{m} = - dv$$

$$\text{daher } \frac{ads dt}{m} = - \frac{dv}{v^2}$$

$$\text{oder } \frac{ads}{m} \cdot dt = - v^{-2} dv$$

a, d, s und m sind hier unveränderliche Größen. Wenn man integriret, so kömmt

$$\frac{ads}{m} \cdot t = + v^{-1} + C$$

$$\text{oder } \frac{ads}{m} \cdot t = + \frac{1}{v} + C$$

wo C eine beständige Größe ist.

Es sei die anfängliche Geschwindigkeit V, so muß $v = V$ werden, wenn $t = 0$. Setzet man demnach in die Gleichung $t = 0$ und $v = V$, so erfährt man, daß $C = - \frac{1}{V}$, also

$$\frac{ads}{m} \cdot t = \frac{1}{v} - \frac{1}{V}$$

Wenn die Flüssigkeit elastisch ist, so gilt ebenfalls noch dieselbige Formel. Denn in diesem Falle ist der Widerstand in jedem Augenblicke $2 adsv^2 . dt$ (Hauptst. IV, §. 2, Zus. I). Es ist aber, hier der Erfahrung zufolge, a nur die Hälfte des a bei unelastischen Flüssigkeiten (Hauptst. IV, §. 6). Also gilt hier $2a$ eben so viel als das bloße a bei unelastischen Flüssigkeiten, und der Widerstand bei elastischen ist ebenfalls $adsv^2\,dt$, wenn man dem a denselbigen Werth läßt, wie bei unelastischen.

Wenn anstatt der Masse m des festen Körpers seine Dichtigkeit D und sein Kubik-Inhalt oder seine Größe g gegeben sind, so ist $m = gD$, und man hat

$$\frac{ads}{gD}\,t = \frac{1}{v} - \frac{1}{V}$$

$$\frac{as}{g}.\frac{d}{D}.t = \frac{1}{v} - \frac{1}{V}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{as}{g}.\frac{d}{D}.t + \frac{1}{V}$$

Exempel I. Gesetzet, ein Würfel von weissem Italienischen Marmor liege unter Wasser auf einem horizontalen Brette, welches als vollkommen glatt angenommen wird. Dieser Würfel halte genau 1 Kubikzoll Rheinländisch Maaß. Seine anfängliche Geschwindigkeit sei 100 Fuß. Man verlanget zu wissen, wie viel Geschwindigkeit er noch nach 2 Sekunden haben wird.

Die Erfahrung lehret, daß (H. IV, §. 6)

$$a = \tfrac{1}{2}$$

Die dem Wasser entgeaengesetzte Fläche s ist 1 Quadratzoll, also in Quadratfußen

$$\frac{1}{12^2} = s$$

die Größe des Würfels ist 1 Kubikzoll, also in Kubikfußen

$$\frac{1}{12^3} = g$$

$$\text{also } \frac{as}{g} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{12^2}}{\left(\frac{1}{12^3}\right)} = 6$$

Weisser Marmor ist 2,707 mal so schwer als Wasser, also ist

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{2,707}$$

Die Zeit ist

$$t = 2$$

die anfängliche Geschwindigkeit ist 100, also

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{100}$$

Wenn man alle diese Werthe substituiret, so kömmt

$$\frac{1}{v} = 6.\frac{1}{2,707}.2 + \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{12}{2,707} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{12000}{2707} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1200000 + 2707}{270700}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1202707}{270700}$$

$$v = \frac{270700}{1202707} = 0,225 \text{ Fuß}$$

Exempel II. Es bleibe alles wie vorher, ausgenommen daß sich der Würfel nicht im Wasser, sondern in der Luft bewege, so bleibet auch alles im Werthe von $\frac{1}{v}$, ausgenommen das Verhältniß der Dichtigkeiten $\frac{d}{D}$. Wasser ist

ist 850 mal dichter als Luft, und weisser italienischer Marmor ist 2,707 mal dichter als Wasser, also ist solcher Marmor 2,707 $\times$ 850 mal oder nächstens 2301 mal dichter als Luft. Folglich ist $\frac{d}{D} = \frac{1}{2301}$, und es wird

$$\frac{1}{v} = 6.\frac{1}{2301}.2 + \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{12}{2301} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1200 + 2301}{230100}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{3501}{230100}$$

$$v = \frac{230100}{3501} = 65,724 \text{ Fuß.}$$

Zusatz I. Aus dem angeführten Exempel siehet man, was für ein gewaltiger Unterschied zwischen der Bewegung im leeren Raume und im widerstehenden Mittelraume ist, hauptsächlich wenn die Dichtigkeit des festen Körpers die Dichtigkeit der flüßigen Materie nur wenige Male übertrift. Wie sehr würde man sich also irren, wenn man, wie vor Zeiten geschahe, den Widerstand der Luft, für unbedeutend halten wollte!

Zusatz. II. Fräget man nach wie viel Zeit die Bewegung aufhöret, so ist die Antwort: niemals. Denn aus der Gleichung

$$\frac{1}{v} = \frac{as}{g}.\frac{d}{D}.t + \frac{1}{V}$$

siehet man zwar, daß, wenn die Zeit t sehr groß wird, $\frac{1}{v}$ auch sehr groß, und folglich v sehr klein wird. Indessen kann v nie $= 0$ werden. Es nimmt also die Geschwindigkeit v ohne Ende ab, ohne je ganz zu verschwinden. Aber wie stimmet dieses mit der Erfahrung, welcher zufolge ein im vollen Raume bewegter Körper bald seine Bewegung ganz verlieret? Hierauf dienet zur Antwort, 1) daß die Geschwindigkeit nach einer kurzen Zeit so klein wird, daß sie gar nicht mehr zu merken ist, welches man aus dem ersten Exempel schließen kann. 2) Daß bei der Rechnung Umstände aus der Acht gelassen sind, welche die Geschwindigkeit noch mehr verkleinern und gar vernichten; nämlich die Reibung auf der horizontalen Fläche, auf welcher der Körper gleitet, welche nicht ganz vermieden werden kann; die Reibung der Flüssigkeit gegen die Seitenflächen des Körpers; und bei dem Wasser noch die Klebrigkeit desselben, welche den Widerstand merklich vergrößern muß.

Zusatz III. In der Gleichung

$$\frac{1}{v} = \frac{as}{g} \cdot \frac{d}{D} \cdot t + \frac{1}{V}$$

multiplizire man alles mit v, so kömmt

$$1 = \frac{asd}{gD} vt + \frac{1}{V} \cdot v$$

Man dividire nun alles durch $\frac{asd}{gD}$, so kömmt

$$\frac{gD}{asd} = vt + \frac{gD}{asd} \cdot \frac{1}{V} \cdot v$$

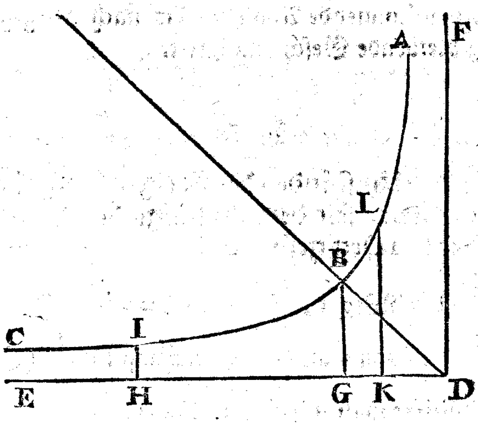
Es sei der Kürze halben $\frac{gD}{asd} = \alpha^2$, so daß $\alpha = \sqrt{\frac{gD}{asd}}$,

so

so kömmt

$$\alpha^2 = vt + \frac{\alpha^2}{V} \cdot v$$

$$\alpha^2 = \left(t + \frac{\alpha^2}{V}\right) v$$



Man beschreibe eine gleichseitige Hyperbel ABC, deren halbe Axe BD $= \sqrt{2\alpha^2}$, so sind die Asymptoten DE, DF senkrecht gegen einander, der Winkel BDE ist ein halber Rechter, und es ist DG $=$ BG $= \alpha$. Man mache DK $= \frac{\alpha^2}{V}$, und KH $= t$, so ist HI $= v$. Denn es ist, vermöge der Eigenschaften der Hyperbel

$$DH \times HI = BG^2$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{V} + t\right) HI = \alpha^2$$

Da nun auch

$$\left(\frac{\alpha^2}{V} + t\right) v = \alpha^2$$

so ist HI $= v$.

Wenn man also von K aus nach E hin jedesmal so viel Einheiten aufträgt als Einheiten in der Zeit t sind, so zeiget die zustimmende Applikate die nach der gegebenen Zeit übrig bleibende Geschwindigkeit.

§. 3.

Unter den Umständen der vorigen Aufgabe wird der in jeder Zeit, seit dem Anfange der Bewegung, zurückgelegte Weg gefordert.

Es sei der Weg x, so ist $dx = vdt$. Ziehet man nun den Werth von v aus der Gleichung für $\frac{1}{v}$ (S. 195) und multipliziret man mit dt, so kömmt

$$dx = vdt = \frac{gDVdt}{asdVt + gD}$$

oder $$dx = \frac{gD}{asd} \cdot \frac{dt}{t + \frac{gD}{asdV}}$$

oder wenn man setzet $\frac{gD}{asd} = \alpha^2$, so ist

$$dx = \alpha^2 \cdot \frac{dt}{t + \frac{\alpha^2}{V}}$$

Da

Da nun dt das Differenzial von $t + \frac{\alpha^2}{V}$ ist, so ist

$$x = \alpha^2. \log. hyp. \left(t + \frac{\alpha^2}{V}\right) + C$$

Es sei μ die Zahl, womit ein briggischer Logarithmus multipliziret werden muß, um ihn in einen hyperbolischen zu verwandeln, so ist

$$x = \alpha^2 \mu. \log. brig. \left(t + \frac{\alpha^2}{V}\right) + C$$

Die beständige Größe C wird durch den Umstand bestimmet, daß $t = 0$ auch $x = 0$ geben muß. Dieses giebt

$$0 = \alpha^2 \mu. \log. \frac{\alpha^2}{V} + C$$

$$C = - \alpha^2 \mu. \log. \frac{\alpha^2}{V}$$

Also ist

$$x = \alpha^2 \mu. \left[\log. \left(t + \frac{\alpha^2}{V}\right) - \log. \frac{\alpha^2}{V}\right]$$

$$x = \alpha^2 \mu. \log. \frac{\left(t + \frac{\alpha^2}{V}\right)}{\left(\frac{\alpha^2}{V}\right)}$$

$$x = \alpha^2 \mu. \log. \left(\frac{V}{\alpha^2} t + 1\right)$$

Exempel I. Laßt uns das Exempel vom marmornen Würfel im Wasser wiederum vornehmen (§. 2, Ex. I).

Es wurde gefunden

$$\frac{as}{g} = 6$$

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{2,707}$$

also $\dfrac{asd}{gD} = \dfrac{6}{2,707} = \dfrac{6000}{2707}$

folglich $\alpha^2 = \dfrac{gD}{asd} = \dfrac{2707}{6000}$

und da $V = 100$, so ist

$$\frac{V}{\alpha^2} = \frac{600000}{2707}$$

Ferner ist bekanntermaßen

$$\mu = 2,3025851$$

Es war auch $t = 2$, folglich wird

$$x = \frac{2707}{6000} \cdot (2,3025851) \cdot \log. \left(\frac{600000}{2707} \cdot 2 + 1\right)$$

$$x = 1,0388 \log. (444,29)$$

$$x = (1,0388) \cdot (2,6477)$$

$$x = 2,7504 \text{ Fuß}$$

Also nur ohngefähr $2\frac{3}{4}$ Fuß weit kömmt der Würfel in 2 Sekunden durchs Wasser, obgleich er mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß sich zu bewegen anfing.

Exempel II. Derselbige Würfel bewege sich in der Luft, wie im zweiten Exempel bei §. 2, so ist immer noch $\dfrac{as}{g} = 6$, hingegen $\dfrac{d}{D} = \dfrac{1}{2301}$, also $\dfrac{asd}{gD} = \dfrac{6}{2301}$,

folglich

folglich $\alpha^2 = \frac{gD}{asd} = \frac{2301}{6}$, also wird

$$x = \frac{2301}{6}.(2,3025851).\log.\left(\frac{600}{2301}.2+1\right)$$

$$x = \frac{2301}{6}.(2,3025851)\log.\left(\frac{1200}{2301}+1\right)$$

$$x = \frac{2301}{6}.(2,3025851).\log.\left(\frac{3501}{2301}\right)$$

$$x = 883,0414\ (\log.3501 - \log.2301)$$

$$\begin{array}{rl} \log.3501 = & 3,5441921 \\ \log.2301 = & 3,3619166 \\ \hline & 0,1822755 \\ & 883,0414 \\ \hline & 1458204 \\ & 145820 \\ & 5468 \\ & 32 \\ & 1 \\ \hline & 160,9526 \text{ Fuß} \end{array}$$

Also ohngefähr 161 Fuß durchläuft in 2 Sekunden durch die Luft der Würfel der im leeren Raume während derselbigen Zeit 200 Fuß zurückgeleget hätte.

Zusatz I. Wenn, in der Figur (Seite 199) KH die Zeit t, und HI die Geschwindigkeit v vorstellet, so wird allemal der zurückgelegte Raum durch die hyperbolische Fläche KLIHK vorgestellet. Denn das Differenzial dieser Fläche ist ebenfalls IH. d (KH) $= vdt$, und das Integral muß auch hier so genommen werden, daß es null werde, wenn $t = 0$.

§. 4.

Aufgabe.

Eine Kugel hat einen Stoß bekommen, vermöge dessen sie sich in gerader Linie durch eine flüssige Materie beweget; es wird gefraget, wie viel Geschwindigkeit ihr nach einer gewissen Zeit übrig bleibet, und wie viel Weges sie in derselbigen Zeit zurückleget?

Da die Kugel halb so viel Widerstand leidet, als ihr größter Zirkel bei einer senkrechten Bewegung leiden würde (Hauptst. IV, §. 11, Zus.); so berechne man den größten Zirkel der Kugel, halbire ihn, nenne diese Hälfte s, und mache die Rechnung für diese Fläche s, wie vorher gelehret worden (§. 2 und 3).

Zusatz. Ueberhaupt, der Körper mag beschaffen sein wie man will, so darf man nur eine Ebne bestimmen, die eben so viel Widerstand leidet, als die Vorderfläche des Körpers (H. IV, §. 10), und die Rechnnng nach Anleituug der beiden vorhergehenden Aufgaben einrichten.

§. 5.

Aufgabe.

Ein Körper fällt in einem widerstehenden Mittelraume. Es wird gefraget, wie viel Geschwindigkeit er nach einer gegebenen Zeit besitzet.

Es sei m die Masse des Körpers, g seine Größe, D seine Dichtigkeit, s die Ebne, welche bei einer senkrechten Bewegung genau so viel Widerstand leiden würde, als der Körper, d die Dichtigkeit des Flüssigen, a die Zahl, welche anzeiget wie vielmal der Widerstand, der Erfahrung zufolge, so groß ist als der hypothetische (§. 2). Es sei ferner p die nach einer Sekunde von der Fallkraft erzeugte Geschwindigkeit, oder die doppelte Höhe des Falles während der ersten Sekunde im leeren Raume. Es sei auch

auch t die vom Anfange des Falles gerechnete Zeit, v die noch vorhandene Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit.

Bei dieser Aufgabe muß der hydrostatische Druck nicht aus der Acht gelassen werden (Hauptst. IV, § 10, Anmerkung). Vermittelst dieses verlieret der Körper von seinem Gewichte so viel als das Gewicht des verdrängten Flüssigen beträgt, nämlich gd. Also muß die Masse des Körpers, welche eigentlich $g\mathrm{D}$ ist, nur für $g\mathrm{D} - gd$ oder $g(\mathrm{D} - d)$ gerechnet werden, oder es ist $m = g(\mathrm{D} - d)$. Es ist pdt die Wirkung der Fallkraft in einer unendlich-kleinen Zeit, also ist $g(\mathrm{D} - d)\,pdt$ die Zunahme der Bewegung in der Zeit dt. Was den Widerstand der Flüssigkeit betrift, so beträgt er im unendlich-kleinen Zeittheilchen dt so viel als $udsv^2dt$ (§. 2), dieser Widerstand muß von jener Zunahme abgezogen werden, und es bleibet

$$g(\mathrm{D} - d)\,pdt - adsv^2dt$$

Theilet man diese Zunahme der Bewegung durch die Masse m oder $g\mathrm{D}$, so kömmt die Zunahme der Geschwindigkeit, also ist

$$dv = \frac{g(\mathrm{D} - d)\,pdt - adsv^2dt}{g\mathrm{D}}$$

$$dv = \left(1 - \frac{d}{\mathrm{D}}\right)pdt - \frac{ads}{g\mathrm{D}}.\,v^2dt$$

Wenn wir nun, wie schon oben (§. 3) geschehen, annehmen $\frac{g\mathrm{D}}{ads} = \alpha^2$, und noch $\left(1 - \frac{d}{\mathrm{D}}\right)p = \beta^2$,

so ist $dv = \beta^2dt - \frac{1}{\alpha^2}v^2dt$

$$\alpha^2dv = \alpha^2\beta^2dt - v^2dt$$

$$\frac{\alpha^2dv}{(\alpha\beta)^2 - v^2} = dt$$

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha\beta + v).(\alpha\beta - v)}dv = dt$$

Es

Es sei

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha\beta + \nu).(\alpha\beta - \nu)} = \frac{A}{\alpha\beta + \nu} + \frac{B}{\alpha\beta - \nu}$$

so ist

$$\alpha^2 = A(\alpha\beta - \nu) + B(\alpha\beta + \nu)$$

$$\alpha^2 = + A\alpha\beta - A\nu$$
$$+ B\alpha\beta + B\nu$$

Um der Identität willen muß sein

$$A\alpha\beta + B\alpha\beta = \alpha^2$$
$$B\nu - A\nu = 0$$

woraus folget

$$B = A = \frac{\alpha}{2\beta}$$

folglich

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2\beta^2 - \nu^2} = \frac{\alpha}{2\beta(\alpha\beta + \nu)} + \frac{\alpha}{2\beta(\alpha\beta - \nu)}$$

und

$$dt = \frac{\alpha^2 d\nu}{\alpha^2\beta^2 - \nu^2} = \frac{\alpha d\nu}{2\beta(\alpha\beta + \nu)} + \frac{\alpha d\nu}{2\beta(\alpha\beta - \nu)}$$

$$dt = \frac{\alpha}{2\beta}\left(\frac{d\nu}{\alpha\beta + \nu} + \frac{d\nu}{\alpha\beta - \nu}\right)$$

und wenn man integriret, so ist

$$t = \frac{\alpha}{2\beta}[\log.hyp(\alpha\beta + \nu) - \log.hgp(\alpha\beta - \nu)] + C$$

$$t = \frac{\alpha}{2\beta}\log.hyp\frac{\alpha\beta + \nu}{\alpha\beta - \nu} + C$$

Da

Da angenommen worden, daß der Körper bloß fällt, ohne sonst einen Stoß bekommen zu haben, so werden zugleich $t = 0$ und $v = 0$, daher

$$0 = \frac{\alpha}{2\beta} \log. hyp\ 1 + C$$

Es ist aber $\log. 1 = 0$, folglich $C = 0$, und

$$t = \frac{\alpha}{2\beta} \log.\ hyp \frac{\alpha\beta + v}{\alpha\beta - v}$$

$$\frac{2\beta t}{\alpha} = \log.\ hyp. \frac{\alpha\beta + v}{\alpha\beta - v}$$

Es sei E die Basis des hyperbolischen Logarithmen-Systemes, so ist

$$E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} = \frac{\alpha\beta + v}{\alpha\beta - v}$$

$$\alpha\beta.\ E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} - v.\ E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} = \alpha\beta + v$$

$$\alpha\beta.\ E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} - \alpha\beta = v.E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + v$$

$$\alpha\beta. \frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} - 1}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1} = v$$

woraus sich also die Geschwindigkeit v für jede verflossene Zeit t berechnen läßt. Es ist $E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}$ die Zahl deren hyper-

bolischer

bolischer Logarithmus $\frac{2\beta t}{\alpha}$ ist. Man multiplizire $\frac{2\beta t}{\alpha}$ mit der Zahl 0,434294819 &c. und zum Produkte als Logarithmus suche man in den Tafeln die gehörige Proporzional-Zahl, so hat man $E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}$. Das übrige kann keine Schwierigkeit verursachen.

Exempel. Gesetzet eine Kugel von weissem italienischen Marmor, die 1 Zoll im Durchmesser hat, falle während 1 Sekunde im Wasser, welche Geschwindigkeit hat sie am Ende dieser Zeit? Um unsere letzte Formel zu gebrauchen müssen wir uns erinnern, daß

$$\beta^2 = \left(1 - \frac{d}{D}\right) p$$

$$\text{also } \beta = \sqrt{\left[\left(1 - \frac{d}{D}\right) p\right]}$$

$$\text{Es ist } \frac{d}{D} = \frac{1}{2{,}707} = \frac{1000}{2707} \text{ (§. 2, Ex. I)}$$

$$\text{also } \left(1 - \frac{d}{D}\right) = 1 - \frac{1000}{2707} = \frac{1707}{2707}$$

Es ist $p = 31{,}253$, wie die Erfahrung lehret, also

$$\beta = \sqrt{\left(1 - \frac{d}{D}\right) p} = \sqrt{\left[\frac{1707}{2707} \cdot (31{,}253)\right]}$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 1707 = & 3{,}2322335 \\
\log.\ 31{,}253 = & 1{,}4948917 \\
\text{comp. log. } 2707 = & 6{,}5675117 \\
\hline
& 1{,}2946369 \\
2) & \overline{0{,}6473184}
\end{array}$$

$$\beta = 4{,}43934$$

Nun

Nun muß auch α berechnet werden. Es ist aber

$$\alpha^2 = \frac{g}{\alpha s} \cdot \frac{D}{d}$$

$$\text{Da } \frac{d}{D} = \frac{1}{2{,}707}, \text{ so ist } \frac{D}{d} = 2{,}707$$

Es ist g die Größe der Kugel. Der Durchmesser ist 1 Zoll $= \frac{1}{12}$ Fuß, also ist die Größe der Kugel $\left(\frac{1}{12}\right)^3 \cdot \frac{\pi}{6}$ $= \frac{\pi}{6 \cdot 12^3}$, wenn sich nämlich der Durchmesser zum Umkreise verhält wie 1 zu π. Es ist demnach $g = \frac{\pi}{6 \cdot 12^3}$

s ist die Fläche die, bei einer senkrechten Bewegung eben so viel Widerstand leidet, als die Vorderfläche der Kugel, also ist s gleich dem halben größten Zirkel der Kugel. Dieser größte Zirkel beträgt $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \pi$, also $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12^2} \cdot \pi = \frac{\pi}{8 \cdot 12^2}$.

Ferner ist $a = \frac{1}{2}$ (§. 2, Ex. I).

$$\text{Also } \alpha^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{6 \cdot 12^3}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8 \cdot 12^2}} \cdot 2{,}707$$

$$\alpha^2 = \tfrac{2}{9} \times 2{,}707$$
$$\alpha^2 = 0{,}6015555$$
$$\alpha = 0{,}7756$$

Da wir α und β haben, so ist es ein leichtes, $\alpha\beta$ zu berechnen. Nämlich mau findet $\alpha\beta = 3{,}443153$.

Nun muß gefunden werden $\frac{2\beta t}{\alpha}$, oder weil $t = 1$, $\frac{2\beta}{\alpha}$

$$\begin{array}{rrl} & \log. 2 = & 0{,}3010300 \\ & \log. \beta = & \underline{0{,}6473184} \\ & & 0{,}9483484 \\ \text{subtr.} & \log. \alpha = & \underline{\bar{1}{,}8896379} \\ & \log. \frac{2\beta}{\alpha} = & 1{,}0587105 \\ & \frac{2\beta t}{\alpha} = & 1{,}0587105 \end{array}$$

Also haben wir im gegenwärtigen Falle

$$v = (3{,}443153) \cdot \frac{E^{1{,}0587105} - 1}{E^{1{,}0587105} + 1}$$

Es ist $E^{1{,}0587105}$ die Zahl, wovon 1,058 &c. der hyperbolische Logarithmus ist. Es sei diese Zahl N, so ist demnach

$$1{,}0587105 = \log.\ hyp.\ N$$

Wenn man einen hyperbolischen Logarithmus mit 0,4342945 multipliziret, so bekömmt man den Briggischen Logarithmus. Nach verrichteter Multiplikazion kömmt

$$0{,}4597919 = \log.\ \text{Brigg}.\ N$$
$$2{,}88265 = N$$

folglich $v = (3{,}443153) \cdot \frac{1{,}88265}{3{,}88265}$

log.

$$\log. 3{,}4431 = 0{,}5369563$$
$$\log. 1{,}88265 = 0{,}2747696$$
$$0{,}8117259$$
$$\text{subtr. } \log. 3{,}88265 = 0{,}5891282$$
$$\log. v = 0{,}2225977$$
$$v = 1{,}6695 \text{ Fuß}$$

Also am Ende der ersten Sekunde des Falles im Wasser hat eine Kugel von 1 Zoll im Durchmesser, von weissem italienischen Marmor, eine Geschwindigkeit von 1 Fuß 8 Zoll ohngefähr, da sie im leeren Raume eine Geschwindigkeit von 31,253 Fuß haben würde.

Zusatz. Wenn man die Formel

$$v = \alpha\beta . \frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} - 1}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}$$

genauer betrachtet, so siehet man, daß $E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}$ immer größer und größer wird, indem die Zeit t zunimmt, und zuletzt können -1 und $+1$ als unbedeutend weggelassen werden. Dann ist bloß

$$v = \alpha\beta$$

Dieses ist der Werth, dem die Geschwindigkeit sich ohne Ende nähert, ohne ihn je zu erreichen. Im Exempel ist $\alpha\beta = 3{,}443153$ oder 3 Fuß $3\frac{1}{3}$ Zoll ohngefähr. Also bleibet die Geschwindigkeit immer etwas kleiner als 3 Fuß $3\frac{1}{3}$ Zoll. Indessen nähert sie sich bald diesem Werthe. Wir haben gesehen, daß die Kugel nach einer

Sekunde beinahe schon die Hälfte dieser Geschwindigkeit hat. Also nach einigen Sekunden kann die Geschwindigkeit als einförmig betrachtet und $= \alpha\beta$ angenommen werden.

§. 6.

Aufgabe.

Ein Körper fällt in einem widerstehenden Mittelraume. Es wird gefraget, wie viel Weges er nach einer gewissen Zeit zurückgeleget hat?

Es sei der verlangte Weg x, so ist $dx = v dt$. Nimmt man den Werth von v aus dem vorhergehenden Paragraph, so ist

$$dx = \alpha\beta. \frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} - 1}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1} dt$$

Der Bruch kann also zertheilet werden

$$\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1} - \frac{1}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}$$

oder

$$\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1} - \frac{E^{-\frac{2\beta t}{\alpha}}}{1 + E^{-\frac{2\beta t}{\alpha}}}$$

Also

Also ist

$$dx = \frac{\alpha\beta . E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} dt}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1} - \frac{\alpha\beta E^{-\frac{2\beta t}{\alpha}} dt}{E^{-\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}$$

Es sei

$$E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1 = z,$$

$$\text{so ist } E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} . \frac{2\beta dt}{\alpha} = dz$$

$$E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} dt = \frac{\alpha}{2\beta} dz$$

folglich wird der erste Satz des zweiten Gliedes

$$\frac{\alpha\beta . \frac{\alpha}{2\beta} dz}{z} = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \frac{dz}{z}$$

hiervon ist das Integral

$$\tfrac{1}{2}\alpha^2 \log. z = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \log. \left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1\right)$$

Es sei

$$E^{-\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1 = y$$

$$\text{so ist} - E^{\frac{-2\beta t}{\alpha}} \frac{2\beta}{\alpha} dt = dy$$

$$E^{\frac{-2\beta t}{\alpha}} dt = -\frac{\alpha}{2\beta} dy$$

und der zweite Satz wird

$$+ \frac{\alpha\beta . \frac{\alpha}{2\beta} . dy}{y} = + \tfrac{1}{2} \alpha^2 \frac{dy}{y}$$

Hiervon ist das Integral

$$\tfrac{1}{2} \alpha^2 \log. hyp. y$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2} \alpha^2 \log. hyp. \left(E^{-\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1\right)$$

Also ist

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \left[\log. \left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1\right) + \log. \left(E^{\frac{-2\beta t}{\alpha}} + 1\right)\right] + C$$

Wenn man $E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1$ mit $E^{\frac{-2\beta t}{\alpha}} + 1$, oder mit $\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}}$ multipliziret,

so

so kommt

$$\frac{\left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}+1\right)^2}{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}} = \left(\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}+1}{E^{\frac{\beta t}{\alpha}}}\right)^2$$

hiervon ist der Logarithmus

$$2 \cdot \log. \left(\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}+1}{E^{\frac{\beta t}{\alpha}}}\right)$$

Also ist

$$x = \alpha^2. \log. hyp. \left(\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}+1}{E^{\frac{\beta t}{\alpha}}}\right) + C$$

Um C zu bestimmen, setze man zugleich $t = 0$ und $x = 0$, dann wird $C = -\alpha^2 \log. 2$. Also ist endlich

$$x = \alpha^2 \log. hyp. \left(\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}+1}{2E^{\frac{\beta t}{\alpha}}}\right)$$

 Exempel.

Exempel. Wir wollen die nämliche im Wasser fallende marmorne Kugel wieder vornehmen, die im Exempel des vorigen Paragraphs angenommen wurde, und die Frage beantworten; wie groß der Weg sei, den sie in der ersten Sekunde ihres Falles zurückgelegt hat? Da hier $t = 1$, so haben wir bloß

$$x = \alpha^2 . \log. hyp \left(\frac{E^{\frac{2\beta}{\alpha}} + 1}{2E^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)$$

Es ist gefunden worden

$$\alpha^2 = 0,6015555$$

$$E^{\frac{2\beta}{\alpha}} = 2,88265$$

daher $E^{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\left(E^{\frac{2\beta}{\alpha}}\right)} = 1,697837$

Also $x = (0,6015555) . \log. hyp. \frac{3,88265}{3,39567}$

$x = 0,6015555 . \log. hyp\ 1,14341$

Nun ist log. Brigg. $1,14341 = 0,0582020$

Multipliziret man diesen Logarithmus mit 2,3025851, so kömmt

$$\log. hyp. 1,14341 = 0,134014$$

Also $x = 0,601555 \times 0,134014$

$x = 0,080617$ Fuß = beinahe 1 Linie

Wie

Wie wenig! und wie beträchtlich ist die Wirkung des widerstehenden Wassers!

Zusatz. Man pfleget zu sagen, ein Körper falle im Wasser mit derjenigen Schwere, die ihm übrig bleibet, nachdem das Gewicht des verdrängten Wassers abgezogen worden. Diese Redensart hat eigentlich keine Bedeutung. Denn beim Fallen im leeren Raume, worauf die Vergleichung zielet, thut das Gewicht des Körpers gar nichts; hingegen beim Fallen im Wasser ist nicht nur das verminderte Gewicht in Anschlag zu nehmen, sondern auch der Stoß des Körpers gegen die Wassertheilchen. Nur, wenn der feste Körper im Wasser ruhend erhalten oder auch gewogen wird, so läßt sich mit Wahrheit sagen, daß von seinem Gewichte das Gewicht des verdrängten Wassers abgezogen werden muß, wie in der Hydrostatik gelehret wird.

§. 7.

Aufgabe.

Es wird ein Körper im angefüllten Raume gerade aufwärts geworfen; man will die Geschwindigkeit wissen, die er nach einer gegebenen Zeit übrig behält.

Wenn wir dieselbigen Benennungen behalten wie bei §. 5, so ist die Wirkung der Schwere in Zeittheilchen dt

$$g\,(D - d)\,p\,dt$$

die Wirkung des Widerstandes ist im nämlichen Zeittheilchen

$$adsv^2\,dt$$

Beide Wirkungen sind dem Steigen des Körpers zuwider. Also verlieret der Körper im Zeittheilchen dt an Kraft

$$g\,(D - d)\,p\,dt + adsv^2\,dt$$

um den Verlust an Geschwindigkeit zu bekommen, muß man den Verlust an Kraft durch die Masse m oder gD dividiren, dann kömmt

$$-dv = \left(1 - \frac{d}{D}\right) pdt + \frac{ads}{gD} v^2 dt$$

Es sei $1 - \frac{d}{D} = \beta^2$, und $\frac{gD}{ads} = \alpha^2$,

so ist

$$-dv = \beta^2 dt + \frac{1}{\alpha^2} v^2 dt$$

$$-\alpha^2 dv = \alpha^2\beta^2 dt + v^2 dt$$

$$\frac{-\alpha^2 dv}{\alpha^2\beta^2 + v^2} = dt$$

Wenn man im ersten Gliede oben und unten durch $\alpha^2\beta^2$ dividiret, so hat man

$$-\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{\alpha\beta}\right)^2} = dt$$

Es sei $\frac{v}{\alpha\beta} = z$, so ist $\frac{dv}{\alpha\beta} = dz$, $dv = \alpha\beta dz$,

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = dt$$

und wenn man integriret,

$$t = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \text{Arc. tang. } z$$

oder

$$t = -\frac{\alpha}{\beta}\text{Arc. tang.}\frac{v}{\alpha\beta}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}t = \text{Arc. tang.}\frac{v}{\alpha\beta}$$

$$\frac{v}{\alpha\beta} = \text{tang.}\left(C - \frac{\beta}{\alpha}t\right)$$

$$v = \alpha\beta.\,\text{tang.}\left(C - \frac{\beta}{\alpha}t\right)$$

Um C zu bestimmen, bemerke man daß wenn $t = 0$, zugleich $v = V$ wird, welches V die anfängliche Geschwindigkeit vorstellen soll; setzet man also $v = V$ und $t = 0$, so ist

$$V = \alpha\beta\,\text{tang. C}$$

$$\frac{V}{\alpha\beta} = \text{tang. C}$$

$$C = \text{Arc. tang.}\frac{V}{\alpha\beta}$$

Folglich

$$v = \alpha\beta\,\text{tang.}\left(\text{Arc. tang.}\frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha}t\right)$$

Diese Gleichung giebt die Geschwindigkeit v am Ende jeder Zeit t. Die Bögen und Tangenten sind für den Halbmesser 1 gerechnet.

Zusatz. Will man wissen, nach wie viel Zeit der Körper zu steigen aufhöret, so setze man $v = 0$, dann hat man

$$0 = \alpha\beta.\,\text{tang.}\left(\text{Arc. tang.}\frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha}t\right)$$

$$0 = \text{tang.}\left(\text{Arc. tang.}\frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha}t\right)$$

Wenn

Wenn die Tangente null werden soll; so muß der Bogen auch null sein, also

$$o = \text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t$$

$$o = \alpha . \text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \beta t$$

$$\beta t = \alpha . \text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta}$$

$$t = \frac{\alpha}{\beta} \text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta}$$

Dieses giebt die verlangte Zeit.

§. 8.

Aufgabe.

Ein fester Körper wird im gefüllten Raume gerade aufwärts geworfen. Es frägt sich, wie viel Weges er nach einer gegebenen Zeit im Steigen zurückgeleget hat?

Heirzu gebrauchen wir wiederum (§. 8) die Formel $dx = v dt$, wo x den Weg, v die Geschwindigkeit und t die Zeit bedeutet. Im gegenwärtigen Falle ist (§. 7)

$$v = \alpha\beta . \text{tang.} \left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t \right)$$

oder

$$v = \alpha\beta . \frac{\text{Sin.} \left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t \right)}{\text{Cos.} \left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t \right)}$$

also

also

$$dx = ydt = \alpha\beta \frac{dt \text{ Sin.}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t\right)}{\text{Cos.}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t\right)}$$

Es sei $\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t = u$

so ist $-\frac{\beta}{\alpha} dt = du$

$$dt = -\frac{\alpha}{\beta} du$$

also $dx = ydt = \alpha^2 \cdot \frac{-du. \text{ Sin. } u}{\text{Cos. } u}$

Nun ist $-du. \text{ Sin. } u$ das Differenzial von $\text{Cos-} u$, also ist der Bruch ein logarithmisches Differenzial, und wenn man integriret, so kömmt

$$x = \alpha^2 \log. \text{Cos. } u + C$$

$$x = \alpha^2 \log. \text{Cos.}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t\right) + C$$

Um C zu bestimmen, setze man $t = 0$ und $x = 0$, dann wird

$$C = -\alpha^2 \log. \text{Cos}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta}\right)$$

also ist endlich

$$x = \alpha^2 \log. \frac{\text{Cos.}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} t\right)}{\text{Cos.}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta}\right)}$$

Zusatz.

Zusatz. Der Körper ist zu seiner größten Höhe gestiegen, wenn $v = 0$, und folglich (§. 7, Zus.).

$$t = \frac{\alpha}{\beta} \text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta}$$

Dann wird

$$x = \alpha^2 \log. \frac{\text{Cos. } 0}{\text{Cos.}\left(\text{Arc. tang. } \frac{V}{\alpha\beta}\right)}$$

$$x = \alpha^2 \log. \frac{1}{\text{Cos.}\left(\text{Arc. tang.} \frac{V}{\alpha\beta}\right)}$$

Dieses ist demnach die Höhe, welche der gerade aufwärts geworfener Körper erreichet.

§. 9.

In der Absicht, die Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, will ich einige Versuche anführen, die ich mit fallenden Körpern gemacht habe. Es waren bleierne Kugeln, deren jede $7\frac{1}{3}$ Linien, Rheinländisch Duodezimal-Maaß, im Durchmesser hatte, und 1 Loth $3\frac{1}{4}$ Quentchen, Berlinisch Handels-Gewicht, wog. Meine anfängliche Absicht war nur bloß, zu versuchen, ob nicht bei solchen schweren Kugeln der Widerstand der Luft aus der Acht gelassen, und die Höhe des Falles wie im leeren Raume berechnet werden könnte. Indessen, da es sich zeiget, daß auch hier der Widerstand der Luft schon merklich ist, so können meine Versuche auch zur Untersuchung dieses Widerstandes dienen.

Der Ort, den ich gewählet hatte, war der Thurm oder Dohm an der französischen Friedrichstädtschen Kirche, hier in Berlin. Dieser Dohm ist inwendig in verschiedene

Stockwerke abgetheilet. Die Böden haben jeder in der Mitte eine große viereckigte Oefnung, so daß ein fallender Körper ungehindert von jedem Stockwerke bis ganz unten gelangen kann. Durch diese Oefnungen ließ ich die Kugeln fallen. Ich hielt dabei am Ohre eine Taschenuhr, deren Unruhe fünfmal in jeder Sekunde schlug, und nach dem Urtheile des Gehörs schäzte ich noch die Zehntheile der Zeitsekunden. Ich zählte bis zum Augenblicke, wo ich den Schall der gefallenen Kugeln hörte, rechnete aber auf eine Höhe von 100 Fuß, $\frac{1}{10}$ einer Zeitsekunde ab, weil der Schall ohngefähr so viel Zeit gebrauchet, um eine Strecke von 100 Fuß zu durchlaufen. Ich wiederholte jeden Versuch einige mal, um recht sicher zu sein, daß der Irrthum nicht $\frac{1}{10}$ einer Sekunde ausmachte. Die Höhen hatte ich auch mehr als einmal mit einem Bleiloth gemessen. Hier sind die Resultate.

Standörter.	Höhe in Rheinl. Fußen u. Zollen.	Dauer des Falles in Sek. u. Zehntheilen.
I	25 F. 0 Zoll.	1, 3 Sek.
II	45 9	1, 7
III	69 8	2, 1
IV	85 10	2, 4
V	106 6	2, 7
VI	138 8	3, 1

Will man berechnen, wie die Höhen mit den Zeiten stimmen, wenn man den Widerstand der Luft aus der Acht läßt, so giebt die Dynamik die Formel $h = \frac{1}{2} pt^2$, wo t die Zeit in Sekunden ist, $\frac{1}{2}p$ die Fallhöhe während der ersten Zeitsekunde im leeren Raume, und h die Fallhöhe während der Zeit t.

Es

Es kömmt hier alles auf die genaue Bestimmung der Größe $\frac{1}{2}p$ an. Gemeiniglich wird angenommen, daß sie 15,0981 Pariser Pariser Fuß beträgt, welches 15,6265 Rheinländische Fuß ausmachet. Indessen gilt diese Bestimmung nur für Paris, dessen geographische Breite ohngefähr 48 Grad 50 Minuten beträgt, nicht aber für Berlin, welches ohngefähr unter $52\frac{1}{2}$ Grad geographischer Breite lieget. Wir müssen also die Größe $\frac{1}{2}p$ besonders für Berlin berechnen, und dieses geschiehet am besten, vermittelst der Länge des einfachen Sekunden-Pendels.

§. 10.

In der französischen Encyklopedie, im Artikel Pendule findet man eine kleine Tafel der Pendellängen für verschiedene Grade der geographischen Breite. Wenn man für $52\frac{1}{2}$ Grad gehörig interpoliret, so bekömmt man 36 Zoll 8,81 Linien oder 3,061 Fuß Par. Maaß für das Sekunden-Pendel in Berlin. Nun machen 13913 Pariser Fuß 14400 Rheinländische Fuß, also machen 3,061 Pariser Fuß so viel als 3,168 Rheinländische Fuß. Dieses ist demnach die Länge des Sekunden-Pendels in Berlin.

§. 11.

Wenn a die halbe Länge des Sekunden-Pendels ausdrücket, wenn π anzeiget, wie vielmal der Umkreis des Zirkels den Durchmesser übertrift, und wenn q die Fallhöhe für die erste Sekunde im leeren Raume ist, so hat man, vermöge der Dynamik,

$$q = a\pi^2$$

(Man sehe unter andern meine Grundlehren der Dynamik, Hauptst. V, §. 19).

Wir haben kurz vorher gefunden $a = \frac{1}{2}(3,168) = 1,584$, und es ist $\pi = 3,1416$, $\pi^2 = 9,8696$,

also

also $q = 1{,}584 \times 9{,}8696$

$q = 15{,}6334$ Rheinländische Fuß.

$p = 2q = 31{,}2668$ Rheinländische Fuß.

§. 12.

Nachdem $\frac{1}{2}p$ gefunden worden, so ist die Formel $h = \frac{1}{2}pt^2$ sehr leicht auf obige Tafel (§. 9) anzuwenden. Nämlich es wird $\frac{1}{2}p$ nach und nach mit dem Quadrate der angeführten Zeitsekunden multipliziret. Die Resultate wird man weiter unten mit angezeiget finden.

§. 13.

Wenn man den Widerstand der Luft in Rechnung bringen will, so kömmt es hauptsächlich darauf an, daß man die spezifische Schwere der Luft so genau als möglich anzugeben wisse. Diese ändert sich zwar mit Barometer- und Thermometer-Höhe. Indessen weiß man aus vielen Erfahrungen, daß die mittlere Dichtigkeit der Luft so beschaffen ist, daß sie 850 mal weniger beträgt, als die Dichtigkeit des Wassers, und dabei wollen wir bleiben. Wenn jemand eine größere Genauigkeit verlanget, so kann ich ihn benachrichtigen, daß der Barometer und Thermometer-Stand folgender Weise beobachtet worden.

Versuche u. Standörter	Barometer-Höhe in Par. Zoll u. Linien.	Grade am Reaumür. Therm.
I und II	27 Zoll $9\frac{3}{4}$ Linien.	$+ 5$
III und IV	28 Z. $1\frac{1}{2}$ Linien.	$+ 6\frac{1}{2}$
V und VI	28 Z. 5 Linien.	$+ 1\frac{1}{4}$

Beide Instrumente befanden sich in der Nähe des Thurmes, ohngefähr 30 Fuß über der Erde.

§. 14.

Um den Weg eines, während einer Zeit in der Luft fallenden, Körpers zu bestimmen, haben wir die Formel (§. 6)

$$x = \alpha^2, \log. hyp. \left(\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}{2E^{\frac{\beta t}{\alpha}}} \right).$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist folgende (§. 5 u. 6)

x, der verlangte Weg oder die Fallhöhe:

t die gegebene Zeit:

E die Basis der hyperbolischen Logarithmen

$\alpha^2 = \frac{gD}{ads}$, wo g die Größe des Körpers ist, D seine Dichtigkeit, s die Ebne, welche bei einer senkrechten Bewegung so viel Widerstand leidenwürde, als die Vorderfläche des gegebenen Körpers, d die Dichtigkeit der flüssigen Materie; $a = \frac{1}{2}$ (Hauptst. IV, §. 6):

$\beta^2 = \left(1 - \frac{d}{D}\right)p$, wo p $(= 2g) = 31,2668$ Rheinländische Fuß (§. 11).

Berechnung des α^2

Es ist $\alpha^2 = \frac{gD}{ads} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{g}{s} \cdot \frac{D}{d}$

Da $\alpha = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{\alpha} = 2$

g ist die Größe der Kugel. Wenn also der Durchmesser k genannt wird, so ist $g = \frac{1}{6}k^3\pi$. Im jetzigen Falle,

wo

wo der Körper eine Kugel ist, beträgt s die Hälfte des größten Zirkels (Hauptst. IV, §. 11, Zus.). Der größte Zirkel macht $\frac{1}{4}k^2\pi$, also seine Hälfte $\frac{1}{8}k^2\pi$. Also ist

$$\frac{g}{s} = \frac{\frac{1}{6}k^3\pi}{\frac{1}{8}k^2\pi} = \frac{4}{3}k$$

Es ist bei unsern Kugeln $k = 7\frac{1}{3}$ Linien $= \frac{22}{3}$ Linien. Da aber hier alle Längen in Fußen gerechnet werden, so ist $k = \frac{22}{3.144}$ Fuß, und $\frac{4}{3}k = \frac{4.22}{9.144} = \frac{g}{s}$, folglich $\frac{1}{a}.\frac{g}{s} = \frac{8.22}{9.144} = \frac{22}{9.18} = \frac{11}{9.9} = \frac{11}{81}$.

Der Bruch $\frac{D}{d}$ zeiget an, wie vielmal Blei schwerer ist als Luft. Nun ist Wasser 850 mal schwerer als Luft (§. 13), und Blei 11,325 mal schwerer als Wasser, also ist Blei 850 × 11,325 mal schwerer als Luft, oder $\frac{D}{d} = 850 \times 11{,}325$. Es ist demnach

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{a}.\frac{g}{s}.\frac{D}{d}\right) = \frac{11 \times 850 \times 11{,}325}{81}$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 11 = & 1{,}0413927 \\
\log.\ 850 = & 2{,}9294189 \\
\log.\ 11{,}325 = & 1{,}0540382 \\
\hline
& 5{,}0248498 \\
\text{Subtr. } \log.\ 81 = & 1{,}9084850 \\
\hline
& 3{,}1163648 = \log.\ \alpha^2 \\
& 1307{,}268 = \alpha^2
\end{array}$$

Berechnung des $\frac{\beta}{\alpha}$

Es ist $\beta^2 = \left(1 - \frac{d}{D}\right) p$

Hier ist $\frac{d}{D} = \frac{1}{850 \times 11,325} = 0,00010388$

Also $1 - \frac{d}{D} = 0,99989612$

Es ist $p = 31,2668$

$$\begin{array}{rl} \log. 0,999896 = & \bar{1},9999548 \\ \log. 31,2668 = & 1,4950834 \\ \hline & 1,4950382 = \log. (\beta^2) \\ \text{Subtr.} & 3,1163648 = \log. (\alpha^2) \\ \hline \text{div. 2)} & 8,3786734 = \log. \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \\ \hline & 9,1893367 = \log. \frac{\beta}{\alpha} \\ & 0,1546453 = \frac{\beta}{\alpha} \end{array}$$

Berechnung des $E^{\frac{\beta}{\alpha}}$

Dieses ist die Zahl, wovon $\frac{\beta}{\alpha}$ der hyperbolische Logarithmus ist. Wenn man den hyperbolischen Logarithmus mit

mit 0,43429448... multipliziret, so kömmt der Briggische Logarithmus

$$
\begin{array}{r}
0{,}4342944 \\
0{,}1546453 \\
\hline
434294 \\
217147 \\
17371 \\
2605 \\
173 \\
21 \\
1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$0{,}0671614 = \log.\,\text{Brig.}\left(E^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

Berechnung der Fallhöhe während 1,3 Sekunden.

Es ist $E^{\frac{\beta t}{\alpha}} = \left(E^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^t$, und $\log.\left(E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right) = t.\log.\left(E^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

Desgleichen

$\left(F^{\frac{2\beta t}{\alpha}}\right) = \left(E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right)^2$, also $\log.\left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}\right) = 2\log.\left(E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right)$

Hier ist $t = 1{,}3$

$$0{,}0671614 = \log.\left(E^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

mult. 1,3)

$$
\begin{array}{r}
2014842 \\
\hline
\end{array}
$$

$$0{,}0873098\,2 = \log.\left(E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right)$$

mult 2)

$$0{,}1746196 = \log.\left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}\right)$$

$$1{,}494926 = E^{\frac{2\beta t}{\alpha}}$$

$$2{,}494926 = E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1$$

$$0{,}3970576 = \log.\left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1\right)$$

Zu $0{,}0873098 = \log.\left(E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right)$

add. $0{,}3010300 = \log.\ 2$

$$0{,}3883398 = \log.\left(2E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right)$$

Von $0{,}3970576 = \log.\left(E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1\right)$

subtr. $0{,}3883398 = \log.\left(2E^{\frac{\beta t}{\alpha}}\right)$

$$0{,}0087178 = \log.\frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}{2E^{\frac{\beta t}{\alpha}}}$$

Weil

Weil aber dieses ein Briggischer Logarithmus ist, so muß er mit 2,30258509 multipliziret werden, um ihn hyperbolisch zu machen.

$$\begin{array}{r}
2{,}3025850 \\
\underline{0{,}0087178} \\
184206 \\
16118 \\
230 \\
161 \\
\underline{18} \\
0{,}0200735
\end{array} = \log.\, hyp.\, \frac{E^{\frac{2\beta t}{\alpha}} + 1}{2E^{\frac{\beta t}{\alpha}}}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 0{,}0200735 \\
\text{mult.} & \underline{1307{,}268} = \alpha^2 \\
 & 20073 \\
 & 6021 \\
 & 140 \\
 & 4 \\
 & \underline{1} \\
 & 26{,}239 = x
\end{array}$$

oder $x = 26$ Fuß 3 Zoll ohngefähr.

§. 15.

Wenn man nun alle Fallhöhen zu den bei obigen Versuchen beobachteten Zeiten (§. 9) berechnet, sowohl im leeren Raume (§. 12) als auch in der Luft (§. 14), so bekömmt man die Resultate wie sie in der folgenden Tafel enthalten sind.

	Zeit in Sek.	Berechnete Höhe im leeren Raume.	Berechnete Höhe in der Luft	Gemessene Höhe.
I	1,3	26 Fuß 5 Zoll	26 Fuß 3 Zoll	25 Fuß 0 Zoll
II	1,7	45 F. 2 Z.	44 F. 8 Z.	45 F. 9 Z.
III	2,1	68 F. 11 Z.	67 F. 9 Z.	69 F. 8 Z.
IV	2,4	90 F. 1 Z.	88 F. 1 Z.	85 F. 10 Z.
V	2,7	114 F. 0 Z.	110 F. 9 Z.	106 F. 6 Z.
VI	3,1	150 F. 3 Z.	144 F. 10 Z.	138 F. 8 Z.

Aus dieser Tabelle siehet man, daß die, mit Zuziehung des Widerstandes der Luft berechneten Fallhöhen den gemessenen in der That viel näher kommen, als die anderen, welche für den leeren Raum berechnet worden. Die noch übrigen Unterschiede sind theils positiv, theils negativ, und rühren daher, daß die Zeit nicht hat genauer als bis auf $\frac{1}{10}$ einer Sekunde beobachtet werden können. Denn, wenn der Irrthum in der Zeit auch nur $\frac{1}{20}$ einer Sekunde beträgt, so verursachet dieses schon einen ziemlich großen Unterschied in der Fallhöhe, indem der fallende Körper zuletzt sehr geschwinde gehet. Hieraus kann man zugleich abnehmen, wie unsicher man verfahren würde, wenn man die Fallhöhe für eine gegebene Zeit, z. E. für die erste Sekunde, aus unmittelbaren Versuchen bestimmen wollte. Es ist allemal sicherer, das Pendel dazu zu gebrauchen (§. 10 und §. 11).

Die Vergleichung der Fallhöhe im leeren Raume und in der Luft, wie die Tabelle solche angiebt, lehret uns daß auch bei Körpern von beträchtlicher spezifischer Schwere, z. E. von Blei, der Widerstand der Luft nicht aus der Acht gelassen werden kann, wenn die Höhen etwas beträchtlich sind, und wenn man einige Genauigkeit verlanget.

§. 16.

Da die Theorie der Pendeln mit der Theorie der fallenden Körper in genauer Verbindung stehet, so habe ich

zu

zu denselbigen Zeiten, da ich die vorher erwähnten Versuche machte, auch welche mit Pendeln von sehr großen Längen gemacht. Meine Absicht ist jetzt nicht, mich in Untersuchungen über die Bewegungen des Pendels im angefüllten Raume einzulassen. Indessen will ich doch die Resultate der Versuche hier anführen. Vielleicht kann dieses jemanden veranlassen, sie mit der Theorie zu vergleichen.

Ich habe einen bleiernen Zylinder zum Pendel gebrauchet, oder wenigstens war er äußerlich von Blei: denn, nach dem Gewichte zu urtheilen, vermuthe ich, daß inwendig entweder ein leerer Raum oder eine fremde leichtere Materie befindlich ist. Jedoch, wenn man nur die Ausmessungen und das Gewicht des Zylinders weiß, so thut das übrige wenig oder nichts zur Sache.

Die Höhe des Zylinders beträgt 3 Zoll $3\frac{1}{2}$ Linien, Rheinländisch Duodezimal-Maaß. Der Durchmesser hält 2 Zoll $1\frac{7}{12}$ Linien. Das Gewicht macht 4 Pfund 4 Loth und $3\frac{3}{4}$ Quentchen, Berlinisch Handels- oder Krämer-Gewicht, mit Inbegriff des Häckchens woran der Faden befestiget war. Der mittlere Durchmesser des Fadens war von $\frac{1}{2}$ Linie, und 45 Fuß davon wogen genau 1 Loth. Die Länge des Pendels ist jedesmal vom Aufhängepunkte bis zum Mittelpunkte des Bleies gerechnet worden. Die Barometer- und Thermometer-Höhen waren wie bei den Versuchen mit fallenden Körpern (§. 9).

Die Bögen der Schwingungen habe ich nicht gemessen; indessen betrugen sie jedesmal nur wenige Grade, und sie wurden bei fortdaurender Bewegung immer kürzer und kürzer. Ich glaube, die größten Schwingungen werden höchstens von 5 Graden gewesen sein. Jeder Hin- und Hergang wird für zwei Schwingungen gerechnet. Bei jedem Versuche wurde ein Brett über eine der Oefnungen in den Böden des Thurmes (§. 9) geleget. An diesem Brette wurde der Faden angenagelt, und er hing sammt dem Blei bis nahe am untersten Fußboden des Gebäudes. Die Längen der Pendel wurden aus den schon gemessenen Höhen der Böden und den übrigen Umständen deduziret. Hier sind die Resultate der Versuche

	Länge des Pendels.	Anzahl der Schwingungen in $\frac{1}{4}$ Stunde.
I	23 Fuß 8 Zoll.	332
II	45 F. 0 Z.	246
III	69 F. 2 Z.	197
IV	78 F. 8 Z.	186
V	104 F. 8 Z.	156
VI	137 F. 0 Z.	138

Achtes

Achtes Hauptstück.

Von der Bewegung geworfener Kugeln durch die Luft.

§. 1.

Nachdem wir im vorigen Hauptstücke die geradlinichte Bewegung in widerstehenden Mittelraume betrachtet haben, so kommen wir auf die krummlinichte. Unter allen Aufgaben welche hierher gehören, wollen wir nur das ballistische Problem wählen, welches darin bestehet, daß man die Bewegung einer Bombe, oder einer anderen geworfenen Kugel, mit Zuziehung des Widerstandes der Luft, untersuche; denn wie sich ein solcher Körper im leeren Raume bewegen würde, ist schon aus der Dynamik bekannt.

Diese Aufgabe ist mit großen Schwierigkeiten verknüpfet, und hat den größten Mathematikern viel Kopfbrechens verursachet. Die vollständigste Auflösung, welche bisher erschienen ist, findet man in Bombardier Prussien des Herrn Obersten von Tempelhoff.

Da meine Absicht in diesem Werke nicht ist, neue Erfindungen zu liefern, sondern die nützlichsten mehr oder weniger bekannten Sachen, zum Besten der Anfänger auf die leichteste Art vorzutragen, so hat man im gegenwärtigen Haupt-

Hauptstücke weiter nichts zu erwarten als eine Art von Auszug aus dem Bombardier Prussien.

§. 2.

Es ist gelehret worden (H. IV, §. 6), daß wenn eine Ebne sich in einer Flüssigkeit beweget, und wenn die Richtung der Bewegung auf der Ebne senkrecht ist, der Widerstand in jedem Augenblicke der Bewegung so viel betrage, als das Gewicht einer Säule des Flüssigen, welche die bewegte Ebne zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit entsprechende Höhe hat.

Es ist auch gelehret worden, daß der Widerstand den eine Kugel leidet, wenn sie sich in einer Flüssigkeit beweget, halb so viel beträgt, als der Widerstand den der größte Zirkel der Kugel leiden würde, wenn er sich senkrecht gegen seine Fläche bewegete (Hauptst. IV, §. 2, Zus.). Indessen da es noch zweifelhaft ist, ob dieses seine völlige Richtigkeit habe, so kann man anstatt halb so viel überhaupt λ mal so viel setzen. Die Erfahruug muß dann ausweisen, ob in der That $\lambda = \frac{1}{2}$ oder nicht.

Also leidet eine in der Luft bewegte Kugel einen Widerstand der gleich ist dem Gewichte einer Luftsäule, welche den größten Zirkel der Kugel zur Grundfläche hat, und deren Höhe λ mal so groß ist, als die Höhe von welcher herunter jeder beliebige Körper im leeren Raume fallen müßte, um diejenige Geschwindigkeit zu bekommen, welche die Kugel wirklich in einem gegebenen Zeitpunkte hat. Diese Höhe sei h, und die besagte Geschwindigkeit v, so ist, vermöge der dynamischen Regeln

$$h = \frac{v^2}{4g}$$

folglich $$\lambda h = \frac{\lambda v^2}{4g}$$

wo g die Höhe des Falles im leeren Raume für die erste Sekunde bedeutet.

§. 9.

§. 3.

Es sei nun δ der Durchmesser der Kugel, und die Peripherie in jedem Zirkel sei π mal so groß als der Durchmesser, so ist der Flächen-Inhalt des größten Zirkels

$$\tfrac{1}{4}\,\delta^2\pi$$

Multipliziret man diese Basis der oben erwähnten Säule mit der kurz vorher gefundenen Höhe, so ist der Kubische Inhalt

$$\tfrac{1}{4}\,\delta^2\pi.\ \frac{\lambda v^2}{4g} = \frac{\lambda\delta^2\pi}{16g}\,v^2$$

Wir nehmen an, daß alle Längen in Fußen gemessen sind.

§. 4.

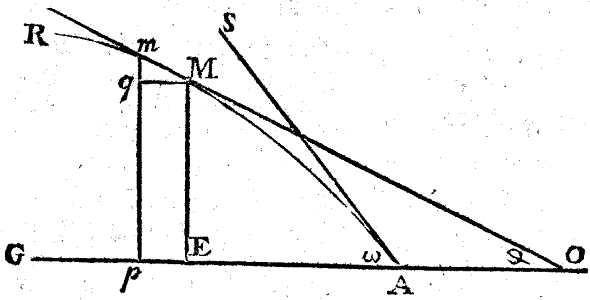
Es sei D das Gewicht eines Kubikfußes Luft, so brauchet man nur den kurz vorher gefundenen Inhalt der Luftsäule mit D zu multipliziren, um das Gewicht derselben, und folglich den Widerstand gegen die Kugel zu finden. Wenn wir also den Widerstand R nennen, so ist

$$R = \frac{\lambda\delta^2\pi D}{16g}\,v^2$$

Die Größe D, welche sich wie die Dichtigkeit verhält, ist veränderlich, indem die obere Luft dünner ist als die untere. Indessen, da die Kugeln nicht bis zu einer sehr großen Höhe zu steigen pflegen, so kann man D als beständig annehmen, so wie es nahe bei der Erdfläche zu sein pfleget.

§. 5.

Es werde die Kugel in der Richtung AS (folg. Fig.) geworfen. Man stelle sich durch A eine horizortale Ebne vor, und durch AS eine vertikale, welche jene in AG schneidet,



schneidet, so beschreibet die Kugel in der Luft eine krumme Linie AMR die in der vertikalen Ebne SAG liezet, wenn sohst keine andere Ursache vorhanden ist, welche die Kugel seitwärts von dieser vertikalen Ebne ablenken könne. Wir nehmen an, sie bleibe wirklich in der gedachten vertikalen Ebne. Die Kugel sei schon bis M gekommen, und beschreibe jetzt den unendlich-kleinen Theil Mm ihrer Bahn. Man fälle ME, mp beide senkrecht gegen die horizontale Linie AG, welche hier als Direktriße oder Axe gebrauchet wird. Man ziehe Mq mit AG parallel. Man verlängere das Theilchen Mm nach O, bis zur Begegnung der verlängerten AG. Nun sei

$$AM = s$$

$$AE = x$$

$$EM = y$$

$$Mm = ds$$

$$Ep = Mq = dx$$

$$mq = dy$$

$$\angle SAG = \omega$$

$$\angle MOE = \varphi$$

die anfängliche Geschwindigkeit $= c$

die

die Geschwindigkeit in M $= v$

die Zeit, während welcher der Bogen s beschrieben worden $= t$

die Zeit, während welcher Mm beschrieben wird $= dt$

Wenn wir die Bewegung nach der horizontalen Richtung betrachten, so wird sie in dieser Richtung durch nichts vermindert, als durch den Widerstand der Luft. Dieser ist immer der Richtung der Bewegung gerade entgegengesetzet, und weil die Bewegung in der Richtung Mm geschiehet, so geschiehet der Widerstand in der Richtung mM. Als eine Kraft betrachtet kann er in zwei andern nach den Richtungen qM und mq zerleget werden. Und es ist der ganze Widerstand zu seinem Theile der in der Richtung qM wirket, wie mM zu qM, oder wie ds zu dx, also beträgt der Widerstand in der horizontalen Richtung

$$R \frac{dx}{ds}$$

und so viel verlieret auch der Körper von seiner Bewegung in der horizontalen Richtung.

Es sei M die Masse der Kugel oder die Quantität ihrer Materie, und A ihr Gewicht, so ist

$$A = M.\ 2g dt$$

indem $2g dt$ die Wirkung der Fallkraft in einem Augenblicke vorstellet, daher ist

$$M = \frac{A}{2g dt}$$

Dividiret man nun den Verlust an Bewegung $R \frac{dx}{ds}$ durch

die

die Masse $M = \frac{A}{2g\,dt}$, so bekömmt man den Verlust an Geschwindigkeit, immer in horizontaler Richtung. Es ist aber diese Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$, also der Verlust an Geschwindigkeit $-d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{ddx}{dt}$, wenn dt als beständig betrachtet wird. Es ist demnach

$$-\frac{ddx}{dt} = R\frac{dx}{ds} : \frac{A}{2g\,dt}$$

$$-\frac{ddx}{dt} = \frac{2g\,dt}{A} . R\frac{dx}{ds}$$

$$(Z) \ldots\ldots -\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{2g}{A} . R\frac{dx}{ds}$$

Wenn wir jetzt die Bewegung in der vertikalen Richtung qm betrachten, so findet ein doppelter Verlust an Kraft Statt. Erstlich entstehet ein Verlust aus demjenigen Theile des Widerstandes, der in vertikaler Richtung genommen wird. Der ganze Widerstand verhält sich zu seinem vertikalen Theile, wie ds zu dy, und der vertikale Theil beträgt demnach

$$R\frac{dy}{ds}$$

und so viel Kraft verlieret auch die bewegte Kugel in vertikaler Richtung. Sie verlieret aber noch vermittelst ihrer relativen Schwere in der Luft, oder des Ueberschusses ihrer Schwere über die Schwere der verdrängten Luft. Dieser Ueberschuß sei N, so verlieret sie noch N an Kraft, weil diese übrige Schwere N der vertikalen Bewegung

gerade

gerade entgegengesetzet ist. Also verlieret sie überhaupt in vertikaler Richtung

$$N + R \frac{dy}{ds}$$

Theilet man wie oben den Verlust an Kraft durch die Masse $M = \frac{A}{2g dt}$, bedenket man, daß der Verlust an Geschwindigkeit in der vertikalen Richtung auch $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ beträgt, und nimmt man dt als beständig an, so ist

$$(Y) \ldots \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{2g}{A}\left(N + R\frac{dy}{ds}\right)$$

§. 6.

Man multiplizire die Gleichung (Z) mit dx, und die Gleichung (Y) mit dy, und addire beide,

$$-\frac{dx.\ ddx}{dt^2} = \frac{2g}{A}.\ R\,\frac{dx^2}{ds}$$

$$-\frac{dy.\ ddy}{dt^2} = \frac{2g}{A}\left(Ndy + R\,\frac{dy^2}{ds}\right)$$

Zusammen

$$-\frac{dx.\ ddx + dy.\ ddy}{dt^2} = \frac{2g}{A}.\left(N\,dy + R\frac{dx^2 + dy^2}{ds}\right)$$

Nun ist $dx^2 + dy^2 = ds^2$ und wenn man differenziret, so kömmt $2dx.\ ddx + 2dy.\ ddy = 2ds.\ dds$ oder $dx.\ ddx + dy.\ ddy = ds.\ dds$. Substituiret man gehörig, so kömmt

$$-\frac{ds.\ dds}{dt^2} = \frac{2g}{A}(Ndy + Rds)$$

Nun ist $\frac{ds. dds}{dt^2} = \frac{ds}{dt}. d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, wenn nämlich immer dt beständig ist, und es ist $\frac{ds}{dt} = v$, also ist das erste Glied so viel als vdv, folglich

$$-vdv = \frac{2g}{A}(Ndy + Rds)$$

§. 7.

Es ist klar, daß

$$dx = ds. \text{Cos.} \phi$$

$$dy = ds. \text{sin.} \phi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sin.} \phi}{\text{Cos.} \phi} = \text{tang.} \phi$$

Es sei

$$q = \frac{dy}{dx} = \text{tang.} \phi$$

so ist $dq = \frac{d\phi}{\text{Cos.}^2 \phi}$

§. 8.

Man multiplizire die Gleichung (Z) mit dy und die Gleichung (Y) mit dx, und subtrahire eine von der andern

$$-\frac{dy. ddx}{dt^2} = \frac{2g}{A}. R. \frac{dx. dy}{ds}$$

$$-\frac{dx. ddy}{dt^2} = \frac{2g}{A}. \left(Ndx + R. \frac{dx. dy}{ds}\right)$$

Wenn

Wenn man die untere von der oberen abziehet, so ist

$$\frac{dx.\,ddy - dy.\,ddx}{dt^2} = -\frac{2g}{A}\,Ndx$$

Da nun $\frac{dy}{dx} = q$, so ist $dq = \frac{dx.\,ddy - dy.\,ddx}{dx^2}$

oder $dx.\,ddx - dy.\,ddx = dq.\,dx^2$, also

$$\frac{dq.\,dx^2}{dt^2} = -\frac{2g}{A}.\,Ndx$$

$$\frac{dq.\,dx}{dt^2} = -\frac{2g}{A}\,N$$

Ferner ist $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$, $\frac{1}{dt^2} = \frac{v^2}{ds^2}$,

also $\frac{v^2.\,dq.\,dx}{ds^2} = -\frac{2g}{A}.\,N$

oder $N = -\frac{A}{2g}.\,v^2.\,\frac{dq.\,dx}{ds^2}$

§. 9.

Setzet man diesen Werth von N in die Gleichung am Ende des 6ten Paragraphs, so kömmt

$$-vdv = \frac{2g}{A}.\left(-\frac{A}{2g}v^2.\frac{dq.\,dx}{ds^2}\,dy + Rds\right)$$

$$-vdv = -v^2\,\frac{dq.\,dx}{ds^2}.\,dy + \frac{2g}{A}\,Rds$$

Es ist aber (§. 4) $R = \frac{\lambda\delta^2\pi D}{16g.}\,v^2$, also $\frac{2g}{A} R = \frac{\lambda\delta^2\pi D}{8A} v^2$. Ferner ist A das Gewicht der Kugel. Ihr Inhalt in Kubikfußen ist $\frac{1}{6}\delta^3\pi$. Gesetzet jeder Kubikfuß wiege d (im Durchschnitt gerechnet, wenn die Kugel nicht von homogener Materie ist), so ist

$$A = \tfrac{1}{6}\delta^3\pi d,\ \text{also ist}\ \frac{2g}{A}.\ R = \frac{\lambda\delta^2\pi D}{8.\frac{1}{6}\delta^3\pi.d} v^2$$

$$= \frac{3\lambda D}{4\delta d} v^2$$

Also

$$-\, v dv = -\, v^2 \frac{dq.\ dx}{ds^2}.\ dy + \frac{3\lambda D v^2}{4\delta d} ds,$$

$$-\frac{dv}{v} = -\frac{dq.\ dx}{ds^2} dy + \frac{3\lambda D}{4\delta d} ds$$

Nun ist (§. 7)

$$dq = \frac{d\varphi}{\text{Cos.}^2\varphi}$$

$$dx = ds.\ \text{Cos.}\,\varphi$$

$$dy = ds.\ \text{sin.}\,\varphi$$

folglich

$$dq.\ dx.\ dy. = \frac{d\varphi.\ \text{Cos.}\,\varphi.\ \text{sin.}\,\varphi}{\text{Cos.}\,\varphi^2} ds^2$$

$$= d\varphi.\ \text{tang.}\,\varphi.\ ds^2$$

und $\frac{dq.\ dx.\ dy}{ds^2} = d\varphi.\ \text{tang.}\,\varphi$

also

also

$$-\frac{dv}{v} = -d\varphi.\ \text{tang}.\ \varphi + \frac{3\lambda D}{4\delta d}\ ds$$

oder

$$\frac{dv}{v} = d\varphi.\ \text{tang}.\ \varphi - \frac{3\lambda D}{4\delta d}\ ds$$

oder, wenn man setzet $\frac{4\delta}{3\lambda}.\ \frac{d}{D^2} = a$, so ist

$$\frac{dv}{v} = d\varphi.\ \text{tang}.\ \varphi - \frac{ds}{a}$$

§. 10.

Laßt uns die letzt gefundene Gleichung integriren. Man kann sie auch also schreiben

$$\frac{dv}{v} - \frac{d\varphi.\ \text{sin}.\ \varphi}{\text{Cos}.\ \varphi} + \frac{ds}{a} = 0$$

Wenn man integriret, und bemerket daß $\frac{s}{a} = \log.\left(E^{\frac{s}{a}}\right)$, (wo E die Basis der hyperbolischen Logarithmen bedeutet,) so hat man

$$\log.\ v + \log.\ \text{Cos}.\ \varphi + \log.\ E^{\frac{s}{a}} + \log.\ C = 0$$

$$\log.\ (v.\ \text{Cos}.\ \varphi.\ E^{\frac{s}{a}}.\ C) = 0$$

$$v.\ \text{Cos}.\ \varphi.\ E^{\frac{s}{a}}.\ C = 1$$

um C zu bestimmen, mache man zugleich $v = c$, $\varphi = \omega$, $s = 0$, so ist

$$c. \cos. \omega. C = 1$$

$$\text{folglich } C = \frac{1}{c. \cos. \omega}$$

und die Gleichung wird

$$\frac{v. \operatorname{Cos.} \varphi. E^{\frac{s}{a}}}{c \cos. \omega} = 1$$

$$(W) \ldots v = \frac{c \cos. \omega}{E^{\frac{s}{a}} \cos. \varphi}$$

§. 11.

Es sei A das Gewicht der Kugel im leeren Raume, Π das Gewicht der verdrängten Luft, so ist das Gewicht der Kugel in der Luft $A - \Pi$, welche Größe oben in der Gleichung (X) (§. 8) mit N bezeichnet worden. Wenn wir demnach anstatt N dessen Werth setzen, so ist

$$A - \Pi = -\frac{A}{2g}. v^2. \frac{dq. dx}{ds^2}$$

$$\text{oder } 1 - \frac{\Pi}{A} = -\frac{1}{2g}. v^2. \frac{dq. dx}{ds^2}$$

oder weil $\frac{\Pi}{A}$ sehr wenig beträgt

$$1 = -\frac{v^2}{2g}. \frac{dq. dx}{ds^2}$$

Es

Es ist aber $dq = \frac{d\varphi}{\text{Cos. }\varphi^2}$, und $dx = ds. \text{ Cos. }\varphi$,

also $dq. dx = \frac{ds. d\varphi}{\text{Cos. }\varphi}$,

folglich $1 = -\frac{v^2 d\varphi}{2g \text{ Cos. }\varphi \text{ d}s}$

Es ist aber (§. 10, Gleichung W)

$$v^2 = \frac{c^2 \text{ Cos. }\omega^2}{E^{\frac{2s}{a}} \text{ Cos. }\varphi^2}$$

also $1 = -\frac{c^2 \text{ Cos. }\omega^2 d\varphi}{2g. E^{\frac{2s}{a}} \text{ Cos. }\varphi^3 \text{ d}s}$

oder $E^{\frac{2s}{a}} ds = -\frac{c^2 \text{ Cos. }\omega^2}{2g} \cdot \frac{d\varphi}{\text{Cos. }\varphi^3}$

§. 12.

Nun kömmt es darauf an diese letzte Gleichung zu integriren. Man kann sie auch so schreiben

$$\frac{a}{2}. E^{\frac{2s}{a}} \cdot \frac{2ds}{a} = \&c.$$

oder, wenn man beiderseits durch $\frac{a}{2}$ dividiret,

$$E^{\frac{2s}{a}} \cdot \frac{2ds}{a} = \frac{c^2 \text{ Cos. }\omega^2}{ag} \cdot \frac{d\varphi}{\text{Cos. }\varphi^3}$$

 Das

Das Integral des ersten Gliedes ist $E^{\frac{2s}{a}}$. Das zweite Glied, oder eigentlich dessen Theil $\frac{d\phi}{\text{Cos. }\phi^3}$ machet etwas mehr Schwierigkeit. Es sei β ein beliebiger Winkel oder vielmehr ein Bogen der 1 zum Halbmesser hat, so hat man diese allgemeine Formel, wo $\int$ das Integral bedeutet

$$\int d\beta.\sin.\beta^{\lambda}.\text{Cos}.\beta^{\mu} = \frac{\lambda+\mu+2}{\mu+1}\int d\beta.\sin.\beta^{\lambda}.\cos.\beta^{\mu+2}$$

$$-\frac{1}{\mu+1}.\sin.\beta^{\lambda+1}.\cos.\beta^{\mu+1}$$

Wem sonst kein Beweis dieser Formel bekannt ist, der darf nur beiderseits differenziren und reduziren, um sich von der Richtigkeit derselben zu überzeugen.

Anstatt $\frac{d\phi}{\text{Cos. }\phi^3}$ wollen wir schreiben $d\phi.\sin.\phi^0$ $\text{Cos}.\phi^{-3}$. Hier ist also $\lambda = 0$, $\mu = -3$, daher ist

$$\int d\phi.\sin.\phi^0.\text{Cos}.\phi^{-3} = \tfrac{1}{2}\int\frac{d\phi}{\text{Cos}.\phi} + \tfrac{1}{2}\frac{\sin.\phi}{\text{Cos}.\phi^2}$$

Nun muß wiederum $\frac{d\phi}{\text{Cos}.\phi}$ integriret werden

Es ist aber

$$\frac{d\phi}{\text{Cos}.\phi} = \frac{d\phi.\text{Cos}.\phi}{\text{Cos}.\phi^2} = \frac{d\phi.\text{Cos}.\phi}{1-\sin.\phi^2}$$

$$= \frac{d\phi.\text{Cos}.\phi}{(1+\sin.\phi).(1-\sin.\phi)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}d\phi.\text{Cos}.\phi}{1+\sin.\phi} + \frac{\frac{1}{2}d\phi.\text{Cos}.\phi}{1-\sin.\phi}$$

Hier-

Hiervon ist das Integral

$$\tfrac{1}{2}\log.\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}$$

$$=\tfrac{1}{2}\log.\frac{\sin.90^g+\sin.\varphi}{\sin.90^g-\sin.\varphi}$$

$$=\tfrac{1}{2}\log.[\mathrm{tang.}(45^g+\tfrac{1}{2}\varphi).\mathrm{cotang.}(45^g-\tfrac{1}{2}\varphi)]$$

$$=\tfrac{1}{2}\log.[\mathrm{tang.}(45^g+\tfrac{1}{2}\varphi)]^2$$

$$=\ \log.\ \mathrm{tang.}(45^g+\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$=-\log.\frac{1}{\mathrm{t.}(45^g+\tfrac{1}{2}\varphi)}$$

Also ist

$$\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos.}\,\varphi^3}=-\tfrac{1}{2}\log.\frac{1}{\mathrm{t.}(45^g+\tfrac{1}{2}\varphi)}+\tfrac{1}{2}\frac{\sin.\varphi}{\mathrm{Cos.}\,\varphi^2}$$

und

$$E^{\frac{2s}{a}}=-\frac{c^2.\ \mathrm{Cos.}\,\omega^2}{ag}\left[-\tfrac{1}{2}\log.\frac{1}{\mathrm{t.}(45^g+\frac{1}{2}\varphi)}+\tfrac{1}{2}\frac{\sin.\varphi}{\mathrm{Cos.}\,\varphi^2}\right]$$

$$E^{\frac{2s}{a}}=\frac{c^2\,\mathrm{Cos.}\,\omega^2}{2ag}\left(-\frac{\sin.\varphi}{\mathrm{Cos.}\varphi^2}+\log.\frac{1}{\mathrm{tang.}(45^g+\frac{1}{2}\varphi)}\right)+C$$

Um die beständige Größe C zu bestimmen, setze man zu gleicher Zeit $s=0$ und $\varphi=\omega$, so kömmt

$$1=\frac{c^2.\mathrm{Cos.}\,\omega^2}{2ag}\left(-\frac{\sin.\omega}{\mathrm{Cos.}\,\omega^2}+\log.\frac{1}{\mathrm{tang.}(45^g+\frac{1}{2}\omega)}\right)+C$$

$$1+\frac{c^2.\mathrm{Cos.}\omega^2}{2ag}\left(\frac{\sin.\omega}{\mathrm{Cos.}\omega^2}-\log.\frac{1}{\mathrm{t.}(45^g+\frac{1}{2}\omega)}\right)=C$$

Setzet man nun anstatt C diesen Werth, und dabei $+ \log.\, \mathrm{tang.}\, (45^g + \frac{1}{2}\omega)$ anstatt $- \log.\, \frac{1}{\mathrm{tang.}(45^g + \frac{1}{2}\omega)}$, so kömmt endlich (V).......

$$E^{\frac{2s}{a}} = 1 + \frac{c^2 \mathrm{Cos.}\omega^2}{2ag}\left[\frac{\mathrm{sin.}\omega}{\mathrm{Cos.}\,\omega^2} - \frac{\mathrm{sin.}\,\varphi}{\mathrm{Cos.}\varphi^2} + \mathrm{l.}\frac{\mathrm{t.}(45^g + \frac{1}{2}\omega)}{\mathrm{t.}(45^g + \frac{1}{2}\varphi)}\right]$$

Vermittelst dieser Gleichung läßt sich s jedesmal finden, wenn der Winkel φ gegeben ist, welchen die Tangente mit der Direktriße machet; das heißt, sobald man nur für einen beliebigen Punkt die Lage der krummen Linie weiß, so findet man ihre Länge vom Wurfspunkte an bis zum angenommenen Punkte.

§. 13.

Im Scheitel der Bahn ist der Winkel $\varphi = 0$, weil nämlich die Tangente horizontal und mit der Direktriße parallel wird. Alsdann hat man

$$(\mathrm{U})\ldots E^{\frac{2s}{a}} = 1 + \frac{c^2.\, \mathrm{Cos.}\omega^2}{2ag}\left[\frac{\mathrm{sin.}\,\omega}{\mathrm{Cos.}\,\omega^2} + \mathrm{l.\,t.}(45^g + \tfrac{1}{2}\omega)\right]$$

Aus dieser Gleichung also erhält man die Länge der krummen Linie vom Wurfs-Punkte an, bis zum Scheitel.

§. 14.

Wenn der Winkel gegeben ist, welchen die Tangente mit dem Horizonte machet, und wenn daraus die Länge des Bogens s oder die Größe $E^{\frac{s}{a}} = \sqrt{\left(E^{\frac{2s}{a}}\right)}$ berechnet worden, so läßt sich auch die Geschwindigkeit am Ende des Bogens

Bogens s vermittelst der Gleichung (W) Seite 246 bestimmen. Im Scheitel der krummen Linie ist $\varphi = 0$, folglich

$$(\mathrm{T}) \ldots\ldots\; y = \frac{c.\,\mathrm{Cof.}\,\omega}{\mathrm{E}^{\frac{s}{a}}}$$

§. 15.

Wir hatten (§. 11)

$$\mathrm{E}^{\frac{2s}{a}}\,\mathrm{d}s = -\frac{c^2.\,\mathrm{Cof.}\,\omega^2}{2g}.\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{Cof.}\,\varphi^3}$$

Setzen wir nun, um der Kürze willen

$$\frac{2}{a} = m$$

$$\text{und} - \frac{c^2.\,\mathrm{Cof.}\,\omega^2}{2g} = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{oder} - \frac{2g}{c^2.\,\mathrm{Cof.}\,\omega^2} = \beta$$

$$\text{so ist } \mathrm{E}^{ms}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\beta.\,\mathrm{Cof.}\,\varphi^3}$$

daher

$$(\mathrm{S}) \ldots \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \beta.\,\mathrm{E}^{ms}.\,\mathrm{Cof.}\,\varphi^3$$

Wir hatten auch (§. 10, Gleichung W)

$$\frac{c.\,\mathrm{Cof.}\,\omega}{\mathrm{E}^{\frac{s}{a}}.\,\mathrm{Cof.}\,\varphi} = y$$

und

und es ist $v = \frac{ds}{dt}$, also

$$(R) \ldots \frac{ds}{dt} = \frac{c.\,\mathrm{Cos}.\,\omega}{E^{\frac{1}{2}ms}.\,\mathrm{Cos}.\,\varphi} = v$$

§. 16.

Es ist $dy = ds.\,\mathrm{sin}.\,\varphi$ (§. 7). Wäre nun $\mathrm{sin}.\,\varphi$ in einer Funkzion von s ausgedrücket, so ließe sich $ds.\,\mathrm{sin}.\,\varphi$ integriren, und folglich y in einer Funkzion von s finden. Laßt uns annehmen, es sei

$$\mathrm{sin}.\,\varphi = A + B\left(E^{ms} - 1\right) + C\left(E^{ms} - 1\right)^2 + D\left(E^{ms} - 1\right)^3 + F\left(E^{ms} - 1\right)^4 + \&c.$$

wo $m = \frac{2}{a}$ (§. 15). Um hier A zu bestimmen bemerke man, daß zugleich $s = 0$ und $\varphi = \omega$ wird. Ist aber $s = 0$, so ist $E^{ms} = E^0 = 1$, und $E^{ms} - 1 = 0$, daher

$$\mathrm{sin}.\,\omega = A$$

Wenn man die angenommene Gleichung differenziret, so kömmt

$$d\varphi.\mathrm{Cos}.\varphi = B.\,E^{ms}\,mds + 2C\left(E^{ms} - 1\right)E^{ms}\,mds + 3D\left(E^{ms} - 1\right)^2 E^{ms}\,mds + 4F\left(E^{ms} - 1\right)^3 E^{ms}\,mds + \text{rc.}$$

oder

oder

$$\frac{d\phi}{ds} \text{ Cos. } \varphi = B.m.E^{ms} + 2C.mE^{ms}(E^{ms}-1)$$

$$+ 3DmE^{ms}(E^{ms}-1)^2 + 4.Fm.E^{ms}(E^{ms}-1)^3 + \&c.$$

Setzet man anstatt $\frac{d\varphi}{ds}$ dessen Werth $\beta.\, E^{ms}$ Cos. φ^3 (§. 15, Gleichung S), und dividiret man zugleich durch E^{ms}, so ist

$$\beta.\, \text{Cos}\, \varphi^4 = Bm + 2Cm(E^{ms}-1)$$
$$+ 3Dm(E^{ms}-1)^2$$
$$+ 4Fm(E^{ms}+1)^3 + \&c.$$

Machet man nun wiederum $s = 0$, und $\varphi = \omega$, so wird

$$\beta.\, \text{Cos.}\, \omega^4 = Bm$$

$$\text{daher } B = \frac{\beta}{m}.\, \text{Cos.}\, \omega^4$$

$$\text{oder } B = \frac{\beta}{1.2m} \text{Cos.}\, \omega^2\, (1 + \text{Cos.}\, 2\omega)$$

indem Cos. $\omega^2 = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos.}\, 2\omega)$.

Wenn man die Gleichung $\beta.$ Cos. $\varphi^4 = Bm + \&c.$ ferner differenziret, so ist

$$- 4\beta.\, \text{Cos.}\, \varphi^3.\, \text{sin.}\, \varphi.\, d\varphi = 2C.\, E^{ms} m^2 ds$$
$$+ 6D(E^{ms}-1)E^{ms} m^2 ds$$
$$+ 12F(E^{ms}-1)^2 E^{ms} m^2 ds$$
$$+ \&c.$$

oder,

oder, wenn man alles durch ds dividiret

$$-4\beta . \operatorname{Cos}.\varphi^3 . \sin.\varphi . \frac{d\varphi}{ds} = 2C . m^2 . E^{ms}$$
$$+ 6D . m^2 . E^{ms}\left(E^{ms} - 1\right)$$
$$+ 12 . F m^2 . E^{ms}\left(E^{ms} - 1\right)^2$$
$$+ \&c.$$

Setzet man wiederum anstatt $\frac{d\varphi}{ds}$ dessen Werth, und theilet man alles durch E^{ms}, so kömmt

$$-4\beta^2 . \operatorname{Cos}.\varphi^6 . \sin.\varphi = 2Cm^2$$
$$+ 6D . m^2\left(E^{ms} - 1\right)$$
$$+ \&c.$$

Setzet man zu gleicher Zeit $s = 0$ und $\varphi = \omega$, so bekömmt man

$$-4\beta^2 . \operatorname{Cos}.\omega^6 . \sin.\omega = 2Cm^2$$

also $C = -\frac{2\beta^2}{m^2} \operatorname{Cos}.\omega^6 . \sin.\omega$

$$= -\frac{2\beta^2}{m^2} \operatorname{Cos}.\omega^4 . \operatorname{Cos}.\omega^2 . \sin.\omega .$$

$$= -\frac{2\beta^2}{m^2} \operatorname{Cos}.\omega^4 \sin.\omega\left(1 - \sin.\omega^2\right)$$

$$= -\frac{2\beta^2}{m^2} \operatorname{Cos}.\omega^4 . \left(\sin.\omega - \sin.\omega^3\right)$$

Nun ist $\sin.\omega^3 = \frac{3}{4}\sin.\omega - \frac{1}{4}\sin.3\omega$, also $\sin.\omega - \sin.\omega^3 = \sin.\omega - \frac{3}{4}\sin.\omega + \frac{1}{4}\sin.3\omega = \frac{1}{4}\left(\sin.\omega + \sin.3\omega\right)$

Also

Also

$$C = -\frac{\beta^2}{2m^2}\,\text{Cos.}\,\omega^4\,(\text{sin.}\,\omega + \text{sin.}\,3\omega)$$

Wenn man die Gleichung $-4\beta^2\,\text{Cos.}\,\varphi^6\,\text{sin.}\,\varphi = 2Cm^2 + 6Dm^2.\,E^{ms}(E^{ms}-1) + \&c.$, weiter differenziret, so kömmt

$$-4\beta^2\,(-6\,\text{Cos.}\,\varphi^5.\,\text{sin.}\,\varphi^2 d\varphi + \text{Cos.}\,\varphi^7 d\varphi)$$
$$= 6Dm^3 E^{ms} ds + \&c.$$

$$\text{oder } 4\beta^2.d\varphi\,(6\,\text{Cos.}\,\varphi^5.\,\text{sin.}\,\varphi^2 - \text{Cos.}\,\varphi^7)$$
$$= 6Dm^3 E^{ms} ds + \&c.$$

$$\text{oder } 4\beta^2\,\frac{d\varphi}{ds}\,(6\,\text{Cos.}\,\varphi^5.\,\text{sin.}\,\varphi^2 - \text{Cos.}\,\varphi^7)$$
$$= 6D.m^3 E^{ms} + \&c.$$

Setzet man anstatt $\frac{d\varphi}{ds}$ dessen Werth, und dividiret man zugleich durch E^{ms}, so kömmt

$$4\beta^3.\,\text{Cos.}\,\varphi^3\,(6\,\text{Cos.}\,\varphi^5.\,\text{sin.}\,\varphi^2 - \text{Cos.}\,\varphi^7.)$$
$$= 6Dm^3 + \&c.$$
$$4\beta^3\,\text{Cos.}\,\varphi^6\,(6\,\text{Cos.}\,\varphi^2.\,\text{sin.}\,\varphi^2 - \text{Cos.}\,\varphi^4)$$
$$= 6Dm^3 + \&c.$$

$$D = \tfrac{2}{3}\frac{\beta^3}{m^3}\,\text{Cos.}\,\varphi^6\,(6\,\text{Cos.}\,\varphi^2.\,\text{sin.}\,\varphi^2 - \text{Cos.}\,\varphi^4)$$

Nun ist $\text{sin.}\,\varphi^2 = 1 - \text{Cos.}\,\varphi^2$; also wird der Ausdruck in der Parenthese

$$6\,\text{Cos.}\,\varphi^2 - 6\,\text{Cos.}\,\varphi^4 - \text{Cos.}\,\varphi^4 = 6\,\text{Cos.}\,\varphi^2 - 7\,\text{Cos.}\,\varphi^4$$

Nun

Nun ist

$$2\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^2 = 1 + \mathrm{Cos.}\ 2\varphi$$

$$\text{also } 6\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^2 = 3 + 3\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi$$

Ferner ist

$$\mathrm{Cos.}\ \varphi^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8}\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi + \tfrac{1}{8}\ \mathrm{Cos.}\ 4\varphi$$

$$\text{also } 7\ \mathrm{Cos.}\ \varphi^4 = \tfrac{21}{8} + \tfrac{28}{8}\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi + \tfrac{7}{8}\ \mathrm{Cos.}\ 4\varphi$$

Dieses subtrahire man von $3 + 3\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi$, so bleibet

$$\tfrac{3}{8} - \tfrac{4}{8}\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi - \tfrac{7}{8}\ \mathrm{Cos.}\ 4\varphi$$

$$\text{oder } \frac{3 - 4\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi - 7\ \mathrm{Cos.}\ 4\varphi}{8}$$

also

$$D = \tfrac{1}{12}\,\frac{\beta^3}{m^3}\,\mathrm{Cos.}\,\varphi^6\,(3 - 4\ \mathrm{Cos.}\ 2\varphi - 7\ \mathrm{Cos.}\ 4\ )$$

Wenn man auf solche Art fortfährt, die Koeffizienten A, B, C, D, F, G, H &c. zu bestimmen, so findet man

$$A = \mathrm{sin.}\ \omega$$

$$B = \frac{1}{1.2}\,\frac{\beta}{m}\,\mathrm{Cos.}\ \omega^2\,(1 + \mathrm{Cos.}\ 2\omega)$$

$$C = -\frac{1}{1.2}\,\frac{\beta^2}{m^2}\,\mathrm{Cos.}\ \omega^4\,(\mathrm{sin.}\ \omega + \mathrm{sin.}\ 3\omega)$$

$$D = +\frac{1}{2.1.2.3}\,\frac{\beta^3}{m^3}\,\mathrm{Cos.}\,\omega^6\,(3 - 4\ \mathrm{Cos.}\,2\omega - 7\ \mathrm{Cos.}\,4\omega)$$

$$F = -\frac{1}{2.1.2.3.4}\,\frac{\beta^4}{m^4}.\ \mathrm{Cos.}\,\omega^8\,(26\ \mathrm{sin.}\ \omega - \mathrm{sin.}\ 3\omega - 35\ \mathrm{sin.}\ 5\omega)$$

$$G = +\frac{1}{4.1.2.3.4.5}\,\frac{\beta^5}{m^5}\,\mathrm{Cos.}\,\omega^{10}\,(182 - 279\ \mathrm{Cos.}\,2\omega - 6\ \mathrm{Cos.}\,4\omega + 455\ \mathrm{Cos.}\,6\omega)$$

G

$$H = -\frac{1}{4.1.2.3.4.5.6}\frac{\beta^6}{m^6}\,\mathrm{Cos.}\,\omega^{12}\,(2936\,\mathrm{sin.}\,\omega$$

$$-\ 1656\,\mathrm{sin.}\,3\omega - 952\,\mathrm{sin.}\,5\omega$$

$$+\ 3640\,\mathrm{sin.}\,7\omega$$

$$I = +\frac{1}{4.1.2.3.4.5.6.7}.\frac{\beta^7}{m^7}\mathrm{Cos.}\,\omega^{14}(16148 - 26536$$

$$\mathrm{Cos.}\,2\omega + 9088\,\mathrm{Cos.}\,4\omega + 17192\,\mathrm{Cos.}\,6\omega$$

$$-\ 34580\,\mathrm{Cos.}\,8\omega)$$

$K = -$ &c.

§. 17.

Da nun $dy = ds.\,\mathrm{sin.}\,\varphi$, und da $\mathrm{sin.}\,\varphi = A + B\,(E^{ms} - 1) + C\,(E^{ms} - 1)^2 +$ &c. so ist

$$dy = A ds + B\,(E^{ms} - 1)\,ds + C\,(E^{ms} - 1)^2\,ds + D\,(E^{ms} - 1)^3\,ds + \text{\&c.}$$

Um diese Gleichung zu integriren, betrachte man, daß

$$(E^{ms} - 1)\,ds = E^{ms}\,ds - ds$$

Ferner

$$(E^{ms} - 1)^2\,ds = E^{2ms}\,ds - 2E^{ms}\,ds + 1 ds$$

Wenn man alles auf diese Art entwickelt, so ist

$$dy = A ds$$
$$+ B (E^{ms} - 1) ds$$
$$+ C (E^{2ms} - 2E^{ms} + 1) ds$$
$$+ D (E^{3ms} - 3E^{2ms} + 3E^{ms} - 1) ds$$
$$+ \&c.$$

Integriret man Stück für Stück, so kömmt

$$y = As$$
$$+ B \left(\frac{E^{ms}}{m} - s\right)$$
$$+ C \left(\frac{E^{2ms}}{2m} - \frac{2E^{ms}}{m} + s\right)$$
$$+ D \left(\frac{E^{3ms}}{3m} - \frac{3E^{2ms}}{2m} + \frac{3E^{ms}}{m} - s\right)$$
$$+ \&c.$$
$$+ K$$

Die beständige Größe K muß so bestimmet werden, daß zugleich $s = 0$ und $y = 0$. Dann wird

$$0 = 0$$
$$+ B \left(\frac{1}{m}\right)$$
$$+ C \left(\frac{1}{2m} - \frac{2}{m}\right)$$
$$+ D \left(\frac{1}{3m} - \frac{3}{2m} + \frac{3}{m}\right)$$
$$+ \&c.$$
$$+ K$$

Folglich

Folglich

$$K = B.\left(-\frac{1}{m}\right)$$
$$+ C.\left(-\frac{1}{2m} + \frac{2}{m}\right)$$
$$+ D.\left(-\frac{1}{3m} + \frac{3}{2m} - \frac{3}{m}\right)$$
$$+ \&c.$$

Wenn man diese Theile des Werthes von K gehörig einschaltet, so wird

$$y = As$$
$$+ B\left(\frac{E^{ms} - 1}{m} - s\right)$$
$$+ C\left(\frac{E^{2ms} - 1}{2m} - \frac{2E^{ms} - 2}{m} + s\right)$$
$$+ D\left(\frac{E^{3ms} - 1}{3m} - \frac{3E^{2ms} - 3}{2m} + \frac{3E^{ms} - 3}{m} - s\right)$$
$$+ \&c.$$

oder

$$y = As$$
$$+ \frac{B}{m}\left[(E^{ms} - 1) - ms\right]$$
$$+ \frac{C}{m}\left[\frac{E^{2ms}}{2} - \frac{1}{2} - 2E^{ms} + 2 + ms\right]$$
$$+ \frac{D}{m}\left[\frac{E^{3ms}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3E^{2ms}}{2} + \frac{3}{2} + 3E^{ms} - 3 - ms\right]$$
$$+ \&c.$$

Betrachtet man die in den Paranthesen eingeschlossenen Größen genauer, so findet sichs daß der Ausdruck auch die folgende Gestalt annehmen kann, wenn man noch anstatt A setzet $\sin.\omega$ (§. 16)

$$(Q) \ldots y = s.\sin.\omega$$
$$+ \frac{B}{m}\left[(E^{ms} - 1) - ms\right]$$
$$+ \frac{C}{m}\left[\frac{(E^{ms} - 1)^2}{2} - \frac{(E^{ms} - 1)}{1} + ms\right]$$
$$+ \frac{D}{m}\left[\frac{(E^{ms} - 1)^3}{3} - \frac{(E^{ms} - 1)^2}{2} + \frac{(E^{ms} - 1)}{1} - ms\right]$$
$$+ \&c.$$

Dieses ist der Werth der Applikate y in einer Funkzion des Bogens s.

§. 18.

Wenn also ein Punkt der krummen Linie, welche die Kugel beschreibet, gegeben ist, und man den Winkel φ weiß, den die krumme Linie (oder ihre Tangente) im gedachten Punkte mit dem Horizont machet, so läßt sich das übrige bestimmen. Nämlich

I) Man findet E^{ms} oder $E^{\frac{2}{a}s}$ vermittelst der Gleichung (V) (§. 12).

II) Hat man $E^{\frac{2}{a}s}$, so bekömmt man auch den Bogen s selbst, denn es sei $E^{\frac{2}{a}s} = X$, so ist $\frac{2}{a}s = \log.hyp.X$ und $s = \frac{a}{2}\log.hyp.X$.

III)

III) Die zustimmende Applikate y, das ist die Höhe in welcher sich die Kugel befindet, wird erhalten, wenn man die Werthe von $E^{\frac{ms}{}}$ und von s in die Gleichung (Q) (§. 17) setzet.

IV) Die Geschwindigkeit im angenommenen Punkte wird vermittelst der Gleichung (W) (§. 10) gefunden, und setzet voraus daß man sowohl den Winkel φ als auch den Bogen s kennet.

§. 19.

Im Scheitel der krummen Linie ist $\varphi = 0$, und die Formel für die Länge des Bogens s bis am Scheitel oder eigentlich $E^{\frac{2s}{a}}$ ist schon oben (§. 13) vermittelst der Gleichung (U) gegeben worden.

Nachdem dieser Bogen bis am Scheitel oder der aufsteigende Zweig der krummen Linie gefunden worden, so darf man nur seinen Werth und zugleich $\varphi = 0$ in die Formel (W) (§. 10) setzen, um die Geschwindigkeit im Scheitel zu finden.

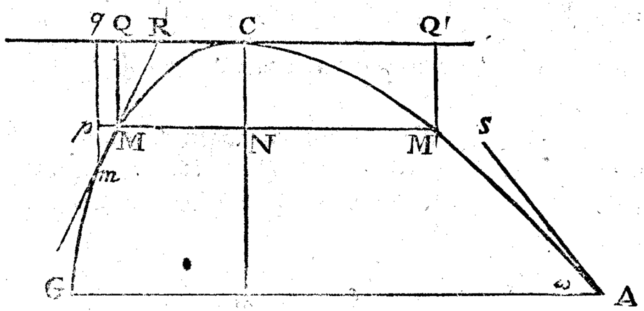
Ferner, wenn man die Größe des aufsteigenden Zweiges anstatt s in die Gleichung (Q) (§. 17) setzet, so bekömmt man die größte Applikate, das heißt, die größte Höhe bis zu welcher die Kugel steiget.

§. 20.

Es sei wiederum ACG die Bahn der Kugel, welche aus A mit einer Geschwindigkeit c geworfen ist, und deren anfängliche Richtung AS mit der horizontalen Linie AG den Winkel ω machet.

Es sei C der Scheitel der Bahn, also CE die größte Applikate. So kann man, wie im vorigen Paragraph

 gezeiget



gezeiget worden, sowohl AC als auch CE und die Geschwindigkeit in C berechnen. Es sei diese Geschwindigkeit $= C$, und $CE = Y$, $AC = S$, so ist (§. 10)

$$C = \frac{c.\,\mathrm{Cos.}\,\omega}{E^{\frac{S}{a}}}$$

weil hier $\varphi = 0$.

§. 21.

Anstatt daß die Kugel, nachdem sie bis C gekommen ist und eine horizontale Richtung CQ bekommen hat, ihren Weg fortsetzet, kann man sich vorstellen, sie werde aus dem Punkt C mit obgedachter Geschwindigkeit in der horizontalen Richtung CQ geworfen, und beschreibe nun die Bahn CG. Auf diese Bahn lassen sich alle Formeln anwenden, welche überhaupt von jeder Kugelbahn gelten, nur daß der Wurfswinkel ω jetzt null ist.

§. 22.

Wir haben gesehen, daß überhaupt (§. 15)

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{2g}{c^2\,\mathrm{Cos.}\,\omega^2}\,E^{ms}\,\mathrm{Cos.}\,\varphi^3$$

Wenn

Wenn wir also den Anfang der krummen Linie bei C nehmen, und einen beliebigen Bogen CM mit s bezeichnen, so ist

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{2g}{C^2.} E^{ms} \mathrm{Cos.}\, \varphi^3$$

weil nämlich hier $\mathrm{Cos.}\, \omega = 1$

und wenn wir setzen $-\frac{2g}{C^2} = \gamma$, so ist

$$\frac{d\varphi}{ds} = \gamma E^{ms} \mathrm{Cos.}\, \varphi^3$$

§. 23.

Es sei jetzt $CQ = z$ eine Abzisse und $QM (= CN) = u$ die zustimmende Applikate für den Punkt M der Bahn CG. Es sei Mm ein unendlich-kleiner Theil der Bahn, und MR die Tangente, welche mit CQ den Winkel φ machet. Verlängert man NM bis p, so ist

$$Mp = Mm.\, \mathrm{Cos.}\, mMp$$

oder $dz = ds.\, \mathrm{Cos.}\, \varphi$

Obgleich der Winkel φ hier negativ ist, so bleibet doch der Kosinus positiv. Ferner ist, weil der Winkel φ negativ ist,

$$mp = - Mm.\, \mathrm{sin.}\, \varphi$$

oder $du = ds.\, \mathrm{sin.}\, \varphi$

Es ist aber $ds = \frac{dz}{\mathrm{Cos.}\, \varphi}$

also $du = -\frac{dz.\, \mathrm{sin.}\, \varphi}{\mathrm{Cos.}\, \varphi}$

$$\frac{du}{dz} = = -\frac{\mathrm{sin.}\, \varphi}{\mathrm{Cos.}\, \varphi}$$

Wir haben auch noch (§. 22 und 23)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma . E^{ms} \text{Cos.} \varphi^3 ds}{ds \text{ Cos.} \varphi}$$

oder $\frac{d\varphi}{dz} = \gamma E^{ms} \text{Cos.} \varphi^2$

§. 24.

Es sei nun die Gleichung zwischen QM und CQ oder u und z so beschaffen daß

$$u = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$$

so kömmt, wenn man differenziret,

$$\frac{du}{dz} = A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \&c.$$

oder da $\frac{du}{dz} = -\frac{\text{sin.} \varphi}{\text{Cos.} \varphi}$, so ist

$$-\frac{\text{sin.} \varphi}{\text{Cos.} \varphi} = A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^2 + \&c.$$

Setzet man nun zugleich $\varphi = 0$ und $= z$ 0, so wird

$$A = 0$$

Differenziret man weiter, so ist

$$-\frac{d\varphi}{\text{Cos.} \varphi^2} = 2Bdz + 2.3\ Cz\, dz + 3.4\ Dz^2\, dz + \&c.$$

oder $-\frac{d\varphi}{dz} . \frac{1}{\text{Cos.} \varphi^2} = 2B + 2.3\ Cz + 3.4 Dz^2 + \&c.$

oder, weil $\frac{d\varphi}{dz} = \gamma . E^{ms}\ \text{Cos.} \varphi^2$

$$-\gamma . E^{ms} = 2B + 2.3.\ Cz + 3.4.\ Dz^2 + \&c.$$

Man

Man mache nun zugleich $s = 0$ und $z = 0$, so wird

$$B = -\tfrac{1}{2}\gamma$$

Defferenziret man weiter, und dividiret man alles durch dz, so ist

$$\frac{-\gamma . E^{ms} mds}{dz} = 2.3C + 2.3.4. Dz + \&c.$$

Setzet man anstatt $\frac{ds}{dz}$ dessen Werth (§. 23) nämlich $\frac{1}{Cos.\ \varphi}$, so ist

$$\frac{-\gamma . E^{ms} m}{Cos.\ \varphi} = 2.3.C + 2.3.4Dz + \&c.$$

Machet man zugleich $z = 0$, $\varphi = 0$, und $s = 0$, so kömmt

$$C = -\frac{m\gamma}{1.2.3}$$

Man differenzire abermals, so kömmt

$$-\gamma . m^2 . E^{ms} \frac{1}{Cos.\ \varphi} . \frac{ds}{dz} - \gamma . mE^{ms} \frac{sin.\ \varphi}{Cos.\ \varphi^2} . \frac{d\varphi}{dz}$$
$$= 2.3.4.D + 2.3.4.5.Fz + \&c.$$

Weil nun $\frac{ds}{dz} = \frac{1}{Cos.\ \varphi}$ und $\frac{d\varphi}{dz} = \gamma . E^{ms}\ Cos.\ \varphi^2$

so ist

$$-\gamma . m^2 . E^{ms} . \frac{1}{Cos.\ \varphi^2} - \gamma^2 m . E^{2ms} sin.\ \varphi = 2.3.4.D$$
$$+ 2.3.4.5.Fz + \&c.$$

Weil nun zu gleicher Zeit $z = 0$, $\varphi = 0$, $s = 0$, so ist

$$\frac{-\gamma m^2}{1.2.3.4} = D$$

Auf solche Art fahre man fort, man setze nach jeder Differenzirung die Werthe von $\frac{ds}{dz}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, man mache hernach $\varphi = 0$, $s = 0$, $z = 0$, so bekömmt man

$$A = 0$$

$$B = -\frac{\gamma}{2}$$

$$C = -\frac{m\gamma}{1.2.3}$$

$$D = -\frac{m^2\gamma}{1.2.3.4}$$

$$F = -\frac{m^3\gamma}{1.2.3.4.5}$$

$$G = -\frac{m^4\gamma}{1.2.3.4.5.6}$$

$$H = \&c.$$

Wenn daher diese Werthe in die Gleichung

$$u = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$$

gesetzet werden, so hat man demnach die Gleichung der krummen Linie für den Punkt C. Da aber $A = 0$, so ist die Gleichung eigentlich

$$u = Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$$

§. 25.

§. 25.

Wenn man durch B dividiret, so ist

$$\frac{u}{B} = z^2 + \frac{C}{B} z^3 + \frac{D}{B} z^4 + \&c.$$

Setzet man $\frac{u}{B} = \theta^2$ oder $\sqrt{\frac{u}{B}} = \theta$, so ist demnach

$$\theta^2 = z^2 + \frac{C}{B} z^3 + \frac{D}{B} z^4 + \&c.$$

Um die Quadratwurzel auszuziehen und θ in einer Funkzion von z zu finden, nehme man an

$$\sqrt{\left(z^2 + \frac{C}{B} z^3 + \frac{D}{B} z^4 + \&c.\right)} = z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \&c.$$

Wenn man beiderseits quadriret, so kömmt

$$z^2 + \frac{C}{B} z^3 + \frac{D}{B} z^4 + \frac{F}{B} z^5 + \&c. = z^2 + 2\alpha z^3$$
$$+ (2\beta + \alpha^2) z^4 + (2\gamma + 2\alpha\beta) z^5 + \&c.$$

Vergleichet man die Koeffizienten, so ist

$$2\alpha = \frac{C}{B}$$

$$2\beta + \alpha^2 = \frac{D}{B}$$

$$2\gamma + 2\alpha\beta = \frac{F}{B}$$

&c. &c.

Setzet

Suchet man hieraus die Werthe von α, β, γ, &c. so kömmt

$$\theta = z + \tfrac{1}{2}.\frac{C}{B}z^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{D}{B} - \tfrac{1}{4}.\frac{C^2}{B^2}\right)z^3$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{F}{B} - \frac{2}{4}.\frac{C.D}{BB} + \frac{3}{4.6}\frac{C^3}{B^3}\right)z^4$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{G}{B} - \frac{2}{4}.\frac{CF}{B^2} - \frac{D^2}{4B^2} + \frac{3.3}{4.6.}\frac{C^2.D}{B^3}\right.$$

$$\left. - \frac{3.5}{4.6.8.}\frac{C^4}{B^4}\right)z^5$$

$$+ \&c.$$

§. 26.

Es wurde angenommen

$$\theta = z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \&c.$$

und die Koeffizienten α, β, γ, &c. sind eben jetzt bestimmet worden. Wollen wir nun z in einer Funkzion von θ haben, so laßt uns setzen

$$z = \theta + a\theta^2 + b\theta^3 + c\theta^4 + \&c.$$

Wenn man diese Reihe quadriret, kubiret, u. s. w., und allemal in die erste Gleichung dieses Paragraphs anstatt z, z^2, z^3, &c. die Werthe setzet, so kömmt

$$\begin{array}{rlllll}
\theta = \theta & + a\theta^2 & + b\theta^3 & + c\theta^4 & & + \&c. \\
 & + \alpha\theta^2 & + 2a\alpha\theta^3 & + (2b\alpha + a^2\alpha)\,\theta^4 & & + \&c. \\
 & & + \beta\theta^3 & + 3a\beta\theta^4 & & + \&c. \\
 & & & + \quad \gamma\theta^4 & & + \&c.
\end{array}$$

Es muß demnach sein

$$a + \alpha = 0$$

$$b + 2a\alpha + \beta = 0$$

$$c + 2b\alpha + a^2\alpha + 3a\beta + \gamma = 0$$

&c. &c.

Daraus

Daraus ziehet man

$$a = -\alpha = -\frac{C}{2B}$$

$$b = 2\alpha^2 - \beta = -\left(\tfrac{1}{2}\frac{D}{B} - \tfrac{5}{8}\frac{C^2}{B^2}\right)$$

$$c = -\left(\frac{F}{2B} - \tfrac{3}{2}\frac{CD}{B^2} + \frac{C^3}{B^2}\right)\theta^4$$

$$+ \&c.$$

und es wird

$$z = \theta - \frac{C}{2B}\theta^2 - \left(\tfrac{1}{2}\frac{D}{B} - \tfrac{5}{8}\frac{C^2}{B^2}\right)\theta^3$$

$$- \left(\frac{F}{2B} - \tfrac{3}{2}\frac{CD}{B^2} + \frac{C^3}{B^3}\right)\theta^4$$

$$- \left(\frac{G}{2B} - \tfrac{7}{4}\frac{CF}{B^2} - \tfrac{7}{8}\frac{D^2}{B^2} + \frac{63C^2D}{4.4.B^3} - \frac{231\,C^4}{4.4.8\,B^4}\right)\theta^5$$

$$- \&c.\ \&c.$$

oder auch

$$z = \theta\left[1 - \frac{C}{2B}\theta - \tfrac{1}{2}\left(\frac{D}{B} - \tfrac{5}{4}\frac{C^2}{B^2}\right)\theta^2 - \&c.\right]$$

§. 27.

Es war

$$\theta^2 = \frac{u}{B}\ (\S.25)$$

und

$$\text{und } B = -\frac{\gamma}{2} \text{ (§. 24)}$$

$$\text{und } \gamma = -\frac{2g}{C^2} \text{ (§. 22)}$$

$$\text{also } \theta^2 = \frac{C^2 u}{g}$$

$$\theta = C\sqrt{\frac{u}{g}}$$

Da $C = -\frac{m\gamma}{1.2.3}$ und $B = -\frac{1}{2}\gamma$, so ist $\frac{C}{2B} = \frac{m}{1.2.3}$. Wenn man so fortfährt, so bekömmt man

$$\begin{aligned} z = \left(C\sqrt{\frac{u}{g}}\right) \Bigg[1 & - \frac{1}{2.3.} mC\sqrt{\frac{u}{g}} \\ & + \frac{m^2}{4.9} C^2 \frac{u}{g} \\ & - \left(\frac{m^3}{2.3.5\,9} + \frac{mg^2}{2.3.5.C^4}\right) C^3 \frac{u}{g}\sqrt{\frac{u}{g}} \\ & + \frac{m^4}{4320} C^4 \frac{u^2}{g^2} \\ & - \text{\&c.} \Bigg] \end{aligned}$$

§. 28.

Wenn man z negativ nimmt, so wird (§. 25)

$$\theta = -z + \frac{1}{2}\frac{C}{B^{\frac{1}{2}}} z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{D}{B} - \frac{1}{4}\frac{C^2}{B^2}\right) z^3 + \text{\&c.}$$

Und ziehet man hieraus den Werth von z, so bekömmt man wiederum die am Ende des vorigen Paragraphs gefundene Reihe, nur daß alle Sätze positiv werden. Dieses

ses negative z bedeutet alsdann die Abzisse CQ′ (§. 20) oder NM′ welche zur nämlichen Applikate Q′M′ (= QM = CN) wie das positive z gehöret.

Nimmt man das positive und das negative z zusammen, als wenn beide positiv wären, so bekömmt man QQ′ odee die Sehne MM′. Es sei diese = Z, so hat man demnach

$$z = \left(C\sqrt{\frac{u}{g}}\right)\left[1 + \frac{m^2}{2.9}\,C^2\,\frac{u}{g} + \frac{m^4}{2160}\,C^4\,\frac{u^2}{g^2} + \&c.\right]$$

indem alle negative Sätze verschwinden, und die positiven gedoppelt werden.

§. 29.

Es ist $C = \frac{c\,\mathrm{Cos}.\omega}{E^{\frac{S}{a}}}$ (§. 20)

und $m = \frac{2}{a}$ (§. 15), also

$$Z = \frac{c\,\mathrm{Cos}.\omega}{E^{\frac{S}{a}}}\sqrt{\frac{u}{g}}\left[2 + \frac{2.}{9.a^2}.\,\frac{c^2\,\mathrm{Cos}.\varphi^2}{E^{\frac{2S}{a}}}.\,\frac{u}{g} + \frac{2}{270.a^4}.\,\frac{c^4\,\mathrm{Cos}.\omega^4}{E^{\frac{4S}{a}}}.\,\frac{u^2}{g^2} + \&c.\right]$$

oder

oder

$$Z = \frac{2c \operatorname{Cos.} \omega}{E^{\frac{S}{a}}} \sqrt{\frac{u}{g}} \left[1 + \frac{1}{9a^2} \cdot \frac{c^2 \operatorname{Cos.} \omega^2}{E^{\frac{2S}{a}}} \cdot \frac{u}{g} + \frac{1}{270 . a^4} \cdot \frac{c^4 . \operatorname{Cos.} \omega^4}{E^{\frac{4S}{a}}} \cdot \frac{u^2}{g^2} + \&c \right]$$

§. 30.

Wenn $u = CE = Y$, so wird $Z = AG$, das heißt, es wird Z die Wurfsweite. Wenn wir diese mit X bezeichnen, so ist demnach

$$X = \frac{2c \operatorname{Cos.} \omega}{E^{\frac{S}{a}}} \sqrt{\frac{Y}{g}} \left[1 + \frac{c^2 \operatorname{Cos.} \omega^2}{9ga^2 . E^{\frac{2S}{a}}} . Y + \frac{c^4 \operatorname{Cos.} \omega^4}{270g2 . E^{\frac{4S}{a}}} Y^2 + \&c. \right]$$

§. 31.

Diese letzte Formel dienet demnach die Wurfsweite zu berechnen. Denn alle Größen, ausgenommen X sind darin bekannt. Nämlich

1) c ist die anfängliche Geschwindigkeit; diese muß für jedes gegebene Stück Geschütz, für eine dazu gegebene Kugel, und für die gegebene Ladung durch die Erfahrung bestimmet werden. Zu diesem Behufe findet man ein Instrument in Robins Artillerie, von Euler übersetzt. Wir werden bald sehen, wie man sich auch ohne solches Instrument behelfen kann.

2) ω ist der Winkel welchen die anfängliche Richtung der Kugel oder die Richtung des Geschützes mit dem Horizonte machet.

3) Es ist (§. 9)

$$a = \frac{4\delta d}{3\lambda D}$$

und hier ist δ der Durchmesser der Kugel, d die (mittlere) Dichtigkeit der Kugel, D die Dichtigkeit der Luft, oder es zeiget $\frac{d}{D}$ an wie vielmal die Kugel mehr wieget als ein gleiches Volumen Luft, welches aus der bekannten spezifischen Schwere der Luft gefunden wird. Was λ betrift (§. 2), so stimmen allemal die Rechnungen am besten mit der Erfahrung, wenn man annimmt $\lambda = \frac{1}{2}$

4) g ist die Höhe von welcher ein fallender Körper in der ersten Sekunde seines Falles herunter kömmt. Diese Größe ist bekannt.

5) Für den obersten Punkt der krummen Linie ist (§. 13)

$$E^{\frac{2S}{a}} = 1 + \frac{c^2 . \operatorname{Cos}.\omega^2}{2ag} \left[\frac{\operatorname{sin}.\omega}{\operatorname{Cos}.\omega^2} - \log.hyp \right.$$
$$\left. \operatorname{tang}.(45^g + \tfrac{1}{2}\omega) \right]$$

Hiervon giebt die Quadratwurzel $E^{\frac{S}{a}}$

Die zweite Potenz $E^{\frac{4s}{a}}$, u. s. w.

6) Y ist die größte Applikate. Diese wird vermittelst der Formeln des 17ten Paragraphs berechnet.

§. 32.

Weil es mühsam ist die anfängliche Geschwindigkeit durch unmittelbare Erfahrungen zu bestimmen, so kann man es auf eine mittelbare Art thun. Nämlich man wirft eine gewisse Kugel vermittelst eines gewissen Geschützes, und einer gewissen Ladung. Man beobachtet die Schußweite. Man versuchet verschiedene Werthe von c in die Formel (§. 30) zu setzen, bis daß die beobachtete Schußweite herauskömmt. Die auf solche Art gefundene Geschwindigkeit c kann nun allemal gebrauchet werden, wenn auch der Winkel verändert wird, so lange nämlich die Ladung der Kugel und das Geschütz unverändert bleiben. Jedoch muß man gestehen, daß je größer der Winkel ω wird, desto mehr widerstehet die Schwere der Kugel der Wirkung des entzündenden Pulvers; indessen da in diesen Rechnungen nie eine vollkommene Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu hoffen ist, so kann auch der gemeldete Umstand aus der Acht gelassen werden, hauptsächlich wenn die Gewalt des Pulvers sehr groß ist, und die anfängliche Geschwindigkeit durch einen Wurf bestimmet worden, wobei der Winkel ω von mitteler Größe war.

§. 33.

Der Herr Verfasser des Bombardier Prussien, nach dessen Anleitung ich das gegenwärtige Hauptstück bearbeitet habe,

habe, untersuchet noch ferner die Zeit, während welcher die Kugel in der Luft bleibet, die Formel für die anfängliche Geschwindigkeit, den Wurfswinkel der die größte Wurfsweite giebt, und den Einfalls-Winkel den die herabfallende Kugel mit dem Horizonte machet, den Einfluß der verschiedenen Dichtigkeit der Luft in verschiedenen Höhen, die Wirkung des Windes, und die Uebereinstimmung der Rechnungen mit einigen Versuchen. Um ihn in allem diesen zu folgen, müßte ich anstatt eines bloßen Kapitels, eine ganze Abhandlung schreiben. Es ist genug, daß ich dem Leser einen Begriff gegeben habe, auf welchem Wege es möglich ist die Wurfsweite zu berechnen.

Jedoch kann ich nicht umhin noch dieses anzuführen. Der Herr Verfasser findet, daß die größte Wurfsweite nicht wie im leeren Raume einen Wurfswinkel von 45 Graden voraussetzet, sondern daß sie bald einen größeren, bald einen kleineren Winkel erfordert, welcher von der anfänglichen Geschwindigkeit und vom Durchmesser der Kugel abhängt.

Anhang zu den mechanischen Wissenschaften,

enthaltend die Anwendung des Grundsatzes von den virtuellen Geschwindigkeiten auf das Gleichgewicht bei den Maschinen.

§. 1.

Der Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten ist gewiß einer der nützlichsten und fruchtbarsten in der ganzen angewandten Mathematik. Descartes und Wallis haben versuchet, die Theorie der einfachen Maschinen daraus herzuleiten; ihre Arbeiten in diesem Fache sind aber unvollkommen, theils weil sie den Grundsatz selbst nicht in seiner ganzen Ausdehnung kannten, theils weil sie dasjenige, was sie davon wußten, nur auf wenige Fälle anwandten. Nachdem ich, zum Besten der Anfänger, den Grundsatz selbst werde erläutert haben, will ich zeigen, wie er auf alle Maschinen, die in der Statik vorkommen, anwendbar ist.

§. 2.

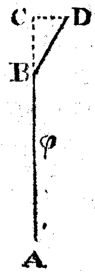
Man gedenke sich irgend ein System von physischen Punkten, welche entweder eine Linie, oder eine Fläche, oder einen Körper, oder eine Sammlung mehrerer Körper, bilden.

bilden. Dieses System werde nun beweget oder wenigstens zur Bewegung gereizet, indem es den Einwirkungen verschiedener Kräfte unterworfen ist, welche ganz oder zum Theil einander entgegengesetzet sind. Es sei φ eine vor diesen Kräften, so ist erstlich nicht zu zweifeln, daß ihre Wirkung um desto größer sein wird, je größer sie selbst ist. Wenn wir also die Wirkung der Kraft φ mit e bezeichnen, so ist anfänglich $e = \varphi$. Zweitens aber ist auch klar, daß die Kraft φ, wegen der Entgegensetzung der übrigen Kräfte ihre volle Wirkung nicht äußern kann. Die in der That erfolgende Wirkung wird um desto größer sein, je weniger die Kraft φ durch die übrigen gehindert wird; und je weniger sie gehindert wird, um desto mehr Geschwindigkeit wird sie dem Punkte geben, auf den sie wirket. Also ist die erfolgende Wirkung um desto größer, je größer die Geschwindigkeit ist, die der von der Kraft φ bewegte Punkt erhält. Die Wirkung ist also nicht nur im Verhältnisse der Kraft φ allein, sondern auch im Verhältnisse der Geschwindigkeit, die sie im zustimmenden Punkte erzeuget. Es sei diese Geschwindigkeit v, so haben wir demnach

$$e = \varphi v$$

§. 3.

Unter der Geschwindigkeit v wird der in der Einheit der Zeit oder überhaupt in einer gewissen beständigen Zeit in der Richtung der Kraft φ zurückgelegte Weg verstanden. Wenn der Punkt sich nicht in der Richtung der Kraft φ bewegen kann, so rühret die Schiefheit seines Weges von den übrigen Kräften her. Man muß also weiter nichts auf Rechnung der Kraft φ setzen, als die Quantität um welche der Punkt in der Richtung derselben fortgerücket ist. Dieses gründet sich auf Newtons Axiom, daß die Bewegung, insofern sie durch eine gegebene Kraft erzeuget wird, allemal in der Richtung dieser Kraft geschiehet.



Wenn also eine Kraft φ in der Richtung AB auf den Punkt B wirket, welcher Punkt zu einem Systeme gehöret, und wenn der Punkt B die Richtung AB verläßt, und z. E. BD durchläuft, so verlängere man AB nach C und fälle DC senkrecht auf diese Verlängerung. Dann ist der Punkt B nur um BC in der Richtung der Kraft φ fortgerücket. Er ist zwar zugleich um DC seitwärts gegangen, dieses ist aber den übrigen Kräften zuzuschreiben.

§. 4.

Wenn die Kraft vermittelst eines Fadens oder eines Stabes wirket, so ist sie gezwungen eben so viel in ihrer eigenen Richtung vorwärts zu gehen, als der Punkt auf den sie wirket vorwärts gehet. In dieser Voraussetzung kann man die Geschwindigkeit der Kraft an die Stelle der Geschwindigkeit des Punktes setzen. Im nämlichen Falle, da immer $e = \varphi v$, kann man sagen, die Wirkung der Kraft φ sei das Produkt aus der Kraft selbst, und aus ihrer Geschwindigkeit in ihrer eigenen Richtung. Wenn die Kraft φ durch die übrigen so gehindert wird, daß sie ge-

zwungen

zwungen ist in Ruhe zu bleiben, so ist $v = 0$, folglich $e = 0$, oder die Wirkung ist vernichtet. Wird die Kraft φ durch die übrigen gezwungen zurück zu weichen, dann wird die Geschwindigkeit v negativ, und folglich wird auch die Wirkung e oder φv negativ.

§. 5.

Johann Bernoulli gebrauchte das Wort **Energie**, um die Wirkung einer Kraft anzudeuten, die auf ein System wirket, welches durch andere ganz oder zum Theil entgegengesetzte Kräfte entweder beweget oder zur Bewegung gereizet wird. Er benannte mit dem Worte **virtuelle Geschwindigkeit** denjenigen Raum welchen die Kraft oder der Punkt auf welchen sie wirket, in einer bestimmten Zeit, in der Richtung der Kraft zurückleget. Wenn man diese Benennungen gebrauchet, so läßt sich die Gleichung $e = \varphi v$ also übersetzen: die Energie einer Kraft, welche auf ein System wirket, ist gleich dem Produkt aus der Kraft selbst und ihrer virtuellen Geschwindigkeit, oder der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes auf welchem sie wirket.

§. 6.

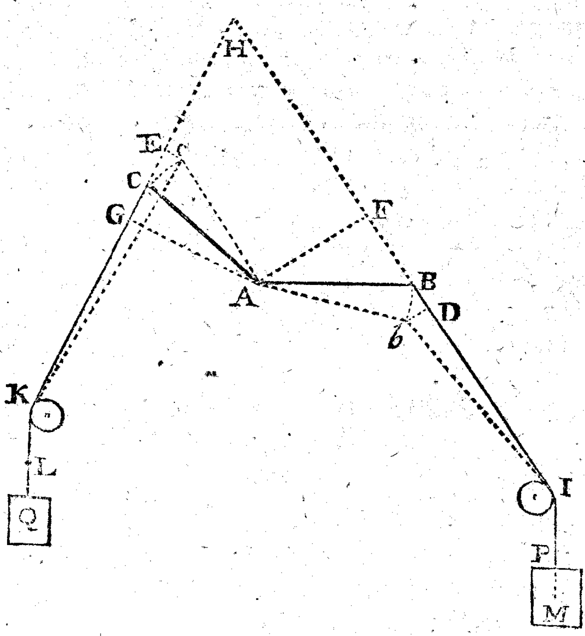
Es wird nicht schwer zu begreifen sein, daß das System in Gleichgewicht bleiben muß, wenn die Summe aller Wirkungen oder aller Energien der Kräfte null ist, welches nicht anders geschehen kann, als wenn die Summe der positiven Energien so groß ist, als die Summe der negativen, wenn man diese als positiv betrachtet. Im Falle des Gleichgewichtes können die virtuellen Geschwindigkeiten nicht anders beobachtet werden, als wenn man dem Systeme eine kleine Bewegung giebt. Wenn dieses geschiehet, so durchlaufen die Kräfte oder die Punkte auf welchen sie wirken, zu gleicher Zeit gewisse Räumchen, welche

welche die virtuellen Geschwindigkeiten und folglich die Energien bestimmen. Also findet das Gleichgewicht Statt, wenn bei einer kleinen Bewegung des Systemes, die algebraische Summe der Energien null wird, odee wenn die arithmetischen Summen der positiven und negativen Energien gleich sind. Dieses ist der wichtige Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten. Aus diesem Grundsatze wollen wir nun die Regeln des Gleichgewichtes für die gewöhnlichsten Maschine herleiten. Die Beweise werden zum Theil das umgekehrte derjenigen sein, wodurch Varignon gezeiget hat, daß sich aus den als bekannt angenommenen Eigenschaften der Maschinen der Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten als eine Folgerung abstrahiren läßt. Da die Ordnung der Maschinen ziemlich willkührlich ist, so fange ich mit dem Hebel, als der bekanntesten an.

§. 7.

Es sei BAC ein Hebel, der in A seinen Ruhepunkt hat, der aber in B und C durch zwei Kräfte z. E. Gewichte gezogen wird, die in den Richtungen BI und CK wirken. Dieser Hebel sei in Gleichgewicht. Er bekomme aber durch eine fremde Kraft eine kleine Bewegung um den Punkt A, so daß der Arm AC den Zirkel-Ausschnitt CA*c*, und der Arm AB den Zirkel-Ausschnitt BA*b* beschreibe. Verlängere die Richtungs-Linien IB und KC nach H. Aus *c* und *b* fälle *c*E und *b*D senkrecht, die eine auf KH, die andere auf IH. Aus dem Ruhepunkte A fälle auch AG senkrecht auf KH und AF senkrecht auf IH. Mache QL = CE, und PM = BD.

So ist die Kraft Q ihrer Richtung zuwider, um die Strecke CE oder QL zurückgetreten, während daß die Kraft P in ihrer Richtung um BD oder PM fortgerücket ist, vorausgesetzet nämlich, daß die Bewegung des Hebels



bels unendlich klein sei, so daß die senkrechten Linien cE, bD zugleich als Zirkelbögen betrachtet werden können, die aus den Mittelpunkten K und I beschrieben sind. Es ist also BD die positive virtuelle Geschwindigkeit der Kraft P, und CE ist die negative virtuelle Geschwindigkeit der Kraft Q, die Energien sind $P \times BD$ und $- Q \times CE$.

Zur Erhaltung des Gleichgewichtes wird demnach erfordert, daß

$$P \times BD - Q \times CE = 0$$

oder $P \times BD = Q \times CE$

oder $P : Q :: CE : BD$

Wenn

Wenn man den Bogen Bb (v. F.), als eine kleine gerade auf AB senkrechte Linie betrachtet, so sind die Dreiecke bBD und BAF ähnlich, weil die zustimmenden Seiten gegen einander senkrecht sind. Aus dem nämlichen Grunde sind die Dreiecke cCE und CAG ähnlich. Hieraus folget, daß

$$AB : AF :: bB : BD$$

daher ist $BD = AF \times \frac{bB}{AB}$

ferner $AC : AG :: cC : CE$

daher $CE = AG \times \frac{cC}{AC}$

Setzet man diese Werthe von CE und BD in die Proporzion

$$P : Q :: CE : BD$$

so kömmt $P : Q :: AG \times \frac{cC}{AC} : AF \times \frac{bB}{AB}$

Nun ist ferner, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke oder Zirkel-Ausschnitte CAc, BAb,

$$AC : cC :: AB : bB$$

also $\frac{cC}{AC} = \frac{bB}{AB}$

Wenn man also in der Proporzion

$$P : Q :: AG \times \frac{cC}{AC} : AF \times \frac{bB}{AB}$$

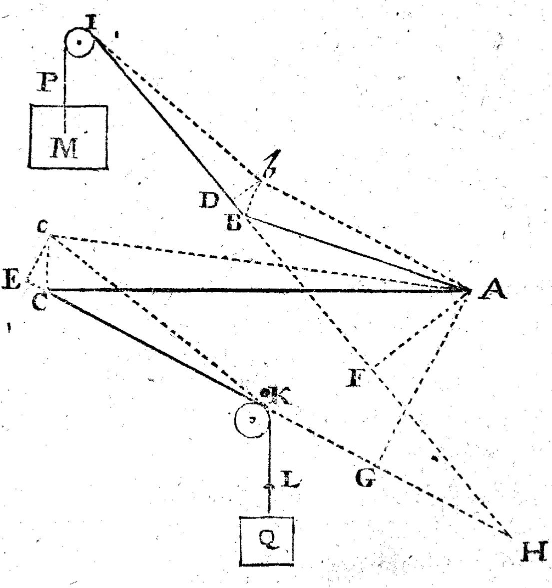
die beiden letzten Sätze durch die gleichen Größen $\frac{cC}{AC}$ und $\frac{bB}{AB}$ dividiret, so erhält man

$$P : Q :: AG : AF$$

das

das heißt: Wenn die beiden Kräfte am Hebel in Gleichgewicht sein sollen, so müssen sie sich umgekehrt verhalten, wie die senkrechten Linien, die aus dem Ruhepunkte auf ihre Richtungen gefället werden. Welches die bekannte Regel ist.

Zusatz I. In der vorhergehenden Figur wurde angenommen, daß sich der Ruhepunkt zwischen beiden Kräften befindet; der Beweis ist aber von Wort zu Wort der nämliche, wenn die eine Kraft sich zwischen der andern und dem Ruhepunkte befindet, nur daß die Lage der Linien und Buchstaben etwas anders ausfällt, wie in der hier beigefügten Figur.

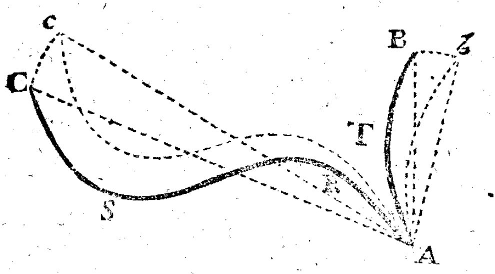


Man

Man darf nur den vorhergehenden Beweis noch einmal lesen und ihn auf diese Figur anwenden.

Zusatz II. Daß wir Gewichte zum Beweise gebrauchet haben, ist bloß um der Deutlichkeit willen geschehen. Anstatt derselbe kann man andere Kräfte, z. E. Menschenhände setzen, die in den Richtungen BI und CK ziehen.

Zusatz III. Daß wir die Arme des Hebels gerade angenommen haben, hatte zum Zwecke die Verwirrung der Figuren zu vermeiden.

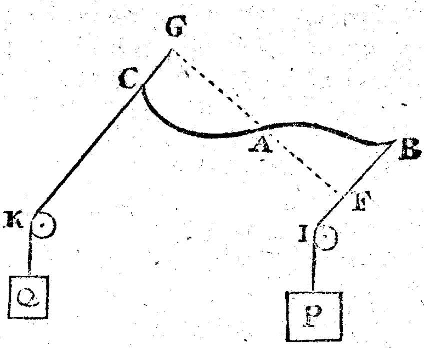


Ist der Hebel krumm, wie z. E. BTARSC, so darf man nur anstatt der beiden krummen Arme ATB und ARSC die geraden AB und AC annehmen, welche bei einer unendlich-kleinen Bewegung die Bögen B*b*, C*c* so gut als die krummen Arme beschreiben. Der Beweis bleibet allemal der nämliche.

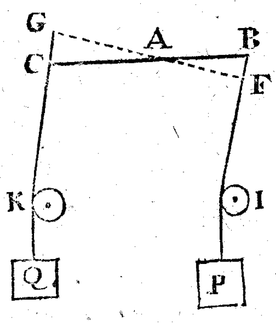
Zusatz IV. Wenn die Richtnugen beider Kräfte parallel sind, so fallen beide auf die Richtungen senkrecht gefällete Linien in eine gerade Linie.

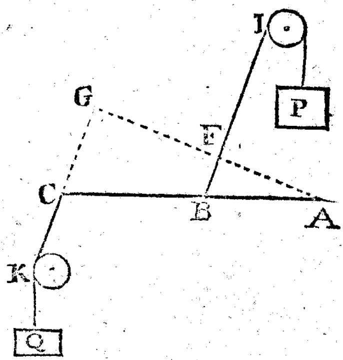
Zum Exempel wenn die Richtungen BI, CK (folg. Fig.) parallel sind, so liegen AG und AF in einer geraden Linie.

Zusatz



Zusatz V. Wenn die Richtungen beider Kräfte parallel sind, und wenn der Hebel eine einzige gerade Linie bildet, so verhalten sich auch, im Falle des Gleichgewichtes die Kräfte, umgekehrt wie die Arme des Hebels.





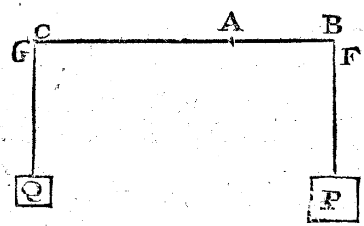
Denn wenn die Richtungen BI und CK parallel sind, so liegen, vermöge des vorigen Zusatzes, AF und AG in einer geraden Linie. Da nun auch AB und AC in einer geraden

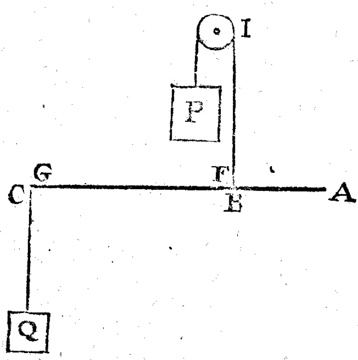
geraden Linie liegen, und da GC mit FB parallel ist, so sind die Dreiecke ABF, ACG ähnlich, und es ist AG : AF :: AC : AB. Das Gleichgewicht erfordert, daß

$$P : Q :: AG : AF$$

also auch $P : Q :: AC : AB$

Zusatz VI. Wenn die Richtungen beider Kräfte parallel sind, und wenn der geradlinichte Hebel gegen diese Richtungen senkrecht ist, so fallen die Punkte F und G auf B und C, und das vorige Verhältniß findet noch Statt.



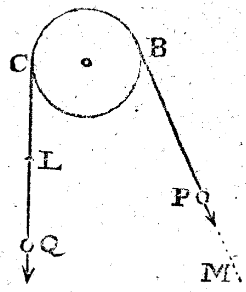


Dieses ist der Fall bei den Wagen und bei den gewöhnlichsten Hebeln.

§. 8.

§. 8.

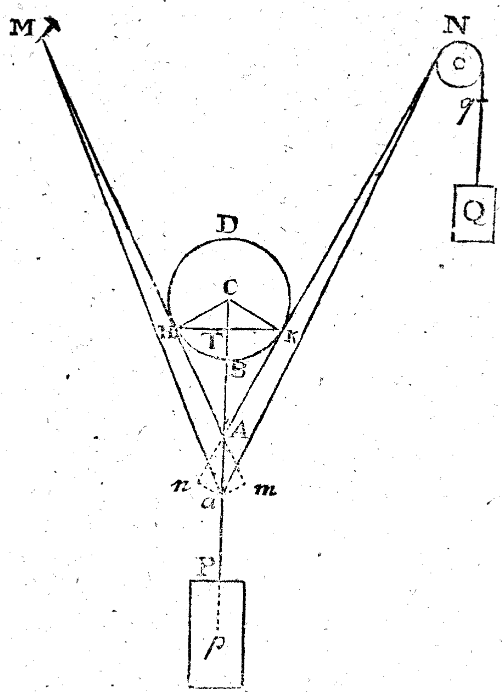
Wir schreiten nunmehr zur Rolle. Wenn die Axe unbeweglich ist, so ist klar, daß wenn die Kraft P in ihrer



Richtung BP um PM vorwärts gehet, die andere Kraft Q, ihrer Richtung zuwider, eine gleiche Strecke QL gehen muß, so daß QL = PM. Da nun das Gleichgewicht erfordert, daß $P \times PM = Q \times QL$ oder daß P : Q :: QL : PM, und da QL = PM, so ist auch P = Q, das heißt, beide Kräfte müssen gleich sein.

Es sei DHBKD eine Rolle (f. F.), die auf einem Seile MHBKN hänget, welches Seil in M befestiget ist, hingegen bei N in der Richtung KN durch ein Gewicht Q oder eine andere Kraft gezogen wird. An der Axe C hänget vermittelst des Seiles CP das Gewicht P. Das Seil MHBKN berühret den Zirkel DHBKD in H und K. Verlängert man die Richtungen MH und NK, so begegnen sie der CP irgendwo in A; die Winkel CAH, CAK sind gleich, sowohl als die Bögen HB und KB. Es ist überhaupt alles auf beiden Seiten der Figur gleich, weil keine Ursache vorhanden ist, warum sich die Rolle und das Gewicht Q mehr nach der einen Seite hin als nach der andern begeben sollten. Ziehe die Halbmesser CH, CK, wie auch die Sehne HTK.

Gesetzt



Gesetzet nun man ziehe das Gewicht P etwas herunter, z. E. von P nach p, so gehet auch der Punkt C um eben so viel herunter, desgleichen der Punkt A welcher in a kömmt, so daß Aa = Pp, indem die Linien MA, NA in die Lagen Ma, Na versetzet werden. Verlängere MA, NA, und fälle am, an senkrecht auf dieselben. So hat sich die Linie MA verlängert um Am, und NA um An. Der ganze Strick MHBKN hat sich demnach verlängern müssen um Am + An, und das Gewicht Q ist in seiner Richtung zurückgegangen um Qq = An + Am, oder um 2Am, weil nämlich An = Am; indem, wie bemerket worden, alles auf beiden Seiten gleich ist.

Das

Das Gleichgewicht erfordert demnach, daß

$$P \times Pp - Q \times Qq = 0$$

oder $P \times Aa - Q \times 2Am = 0$

oder $P \times Aa = Q \times 2Am$

oder $P : Q :: 2Am : Aa$

Die Dreiecke AHC, Ama sind ähnlich, wegen der gleichen Wechselwinkel bei A und der rechten Winkel bei H und m. Es ist demnach

$$Am : Aa :: AH : AC$$

$$2Am : Aa :: 2AH : AC$$

Die Dreiecke AHC und HTC sind auch ähnlich, wegen des gemeinsamen Winkels bei C und der Rechten bei H und T. Also ist

$$AH : AC :: HT : HC$$

$$2AH : AC :: 2HT : HC$$

$$2AH : AC :: HK : HC$$

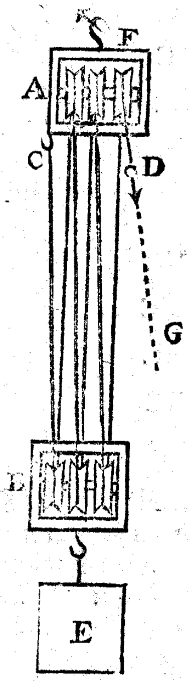
folglich $2Am : Aa :: HK : HC$

folglich $P : Q :: HK : HC$

Das heißt, bei der beweglichen Rolle verhält sich im Falle des Gleichgewichtes das an der Rolle hängende Gewicht zur andern Kraft, wie die Sehne des vom Seile umgespannten Bogens der Rolle, zum Halbmesser der Rolle, welches die gewöhnliche Regel ist.

Zusatz I. Wenn, wie bei den gewöhnlichsten Fällen, die Theile MH und NK des Seiles vertikal und parallel sind, so wird die Sehne HK zum Durchmesser, und dann verhält sich P zu Q, wie der Durchmesser zum Halbmesser oder wie 2 zu 1.

Zusatz II. Wenn mehrere Rollen in Flaschenzügen vereiniget sind, so läßt sich, wegen der Länge des Strickes annehmen, daß dessen Theile die von einer Rolle zur andern gehen, parallel sind.



Es sind A und B zwei Flaschen oder Kloben, deren jeder drei Rollen enthält. Der Strick ist am obern Kloben bei C befestiget, gehet wechselsweise durch den unteren und den oberen Kloben, und zuletzt durch den oberen. Das andere Ende D wird durch eine Kraft gezogen, welche vermittelst dieser Maschine das Gewicht E entweder heben, oder nur in Gleichgewicht halten soll. Es ist erstlich klar, daß der Theil DF des Strickes nichts als die Richtung der Kraft D verändert, und daß es gleichgültig ist, es mag dieser Theil lang oder kurz sein. Gehet nun die Kraft D eine Strecke DG in ihrer eigenen Richtung fort, so wird der Theil DF des Strickes um DG verlängert, hingegen wird der übrige Theil, der von F an über die Rollen gehet und sich in C endiget, um DG verkürzet. Dieser Theil enthält wiederum sechs parallele Theile, so viel nämlich als Rollen in beiden Kloben vorhanden sind; diese parallelen Theile müssen sich alle zugleich verkürzen, und für jeden beträgt die Verkürzung den sechsten Theil von GD. Folglich steiget das Gewicht Q um $\frac{1}{6}$ GD während daß die Kraft um GD fortrücket. Das Gleichgewicht erfordert demnach, daß

$$D \times DG = E \times \tfrac{1}{6} DG$$

oder $D = \frac{1}{6} E$

oder auch $E = 6 D$

das heißt, vermittelst dieser Maschine kann eine Kraft D eine Last E in Gleichgewicht halten, welche die Kraft so vielmal übertrift als parallele Theile des Strickes vorhanden sind, mit Ausschließung des letzten Theiles der von dem oberen Kloben herkömmt, und an welchem die Kraft ziehet.

In der anderen Figur ist der Seil am unteren Kloben in H angebunden. Das letzte Ende IK woran die Kraft K ziehet, gehet aufwärts; die Last Q hänget ebenfalls am unteren Kloben. Wenn nun die Kraft K eine Strecke KN aufwärts gehet, so stelle man sich einen unbewegten Punkt L in der Gegend der Axe des oberen Klobens vor, so verlängert sich KL um KN. Um eben so viel verkürzet sich der übrige Theil LH des Strickes welcher über die Rollen gehet. Und da dieser Theil LH hier 5 parallele Theile enthält, so verkürzet sich jeder derselben um $\frac{1}{5}$KN, und Q steiget um $\frac{1}{5}$KN. Also erfordert hier das Gleichgewicht, daß

$$K \times KN = Q \times \tfrac{1}{5}\,KN$$

oder $K = \frac{1}{5}Q$

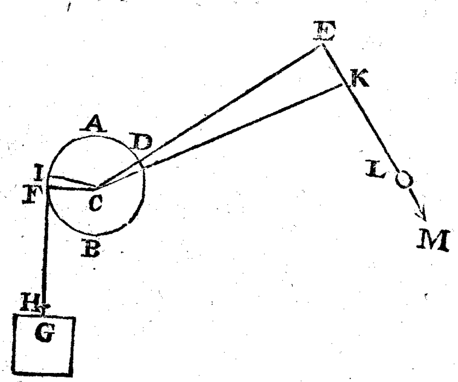
oder $5K = Q$

Folglich kann die Kraft K hier eine Last Q in Gleichgewicht halten, welche die Kraft so vielmal übertrift als parallele Theile des Strickes vorhanden sind, mit Inbegriff des letzten Theiles, welcher vom unteren Kloben aufwärts gehet, und woran die Kraft ziehet.

Dieses alles stimmet mit den gewöhnlichen Regeln der Statik.

§. 9.

Eine Winde pfleget aus einem Wellbaume AB zu bestehen, der sich um seine Axe C drehet, welches Drehen



durch

durch den Arm DE bewirket wird. Am Seile FG, welches sich um den Wellbaum wickelt, hängt die Last G. Gesetzt eine Kraft L wirke in E auf den Arm ED in senkrechter Richtung und in der Ebne des Zirkels, welchen CE beschreiben kann, wie es der gewöhnliche Fall ist, und der Arm ED beschreibe mit seinem Ende E den unendlich-kleinen Zirkelbogen EK, so kann dieser als ein Theil der geraden Linie EL angesehen werden, und die Kraft L rükket vorwärts um LM = EK; unterdessen beschreibet der Punkt F einen Bogen FI von eben so viel Graden als EK, und das Gewicht G steiget um GH = FI. Das Gleichgewicht erfordert also, daß

$$L \times EK = G \times FI$$

oder $L : G :: FI : EK$

Nun ist wegen Aehnlichkeit der Ausschnitte CFI, CEK

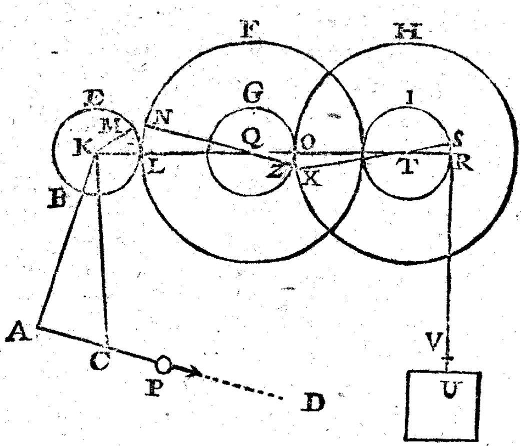
$$FI : EK :: CF : CE$$

also $L : G :: CF : CE$

Nämlich, im Fall des Gleichgewichtes verhalten sich die Kräfte L und G wie der Halbmesser des Wellbaumes zur Summe dieses Halbmessers und des Armes DE, wie auch sonst schon bekannt ist.

Zusatz. Ein Räderwerk kann als eine Zusammensetzung verschiedener Winden betrachtet und dessen Wirkung ebenfalls durch den Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten erkläret werden. Bei dem hier vorgestellten Räderwerke sind, um der Deutlichkeit willen, die Zähne weggelassen.

Es wirke eine Kraft P (folg. Figur) in senkrechter Richtung gegen den Arm AB, so daß das Ende A den unendlich-kleinen Bogen AC (= PD) beschreibe, und die Richtung der Kraft sei zugleich in der Ebne KAC. Der Arm AB sei mit dem Getriebe E verbunden. Dieses



wirke auf das Rad F, woran das Getriebe G befestiget ist. Das Getriebe G wirke auf das Rad H, welches am Wellbaume I befestiget ist. Der Wellbaum trage ein Gewicht U, vermittelst eines Seiles welches sich um den Wellbaum herum wickelt.

Während daß der Arm AB den Ausschnitt AKC beschreibet, so beschreibet der Punkt L des Getriebes E den ähnlichen Ausschnitt LKM, und es ist

$$KA : KL :: AC : LM,$$

$$\text{daher } LM = \frac{KL \times AC}{KA}$$

Da das Getriebe E beständig in die Zähne des Rades F eingereist, so beschreibet zu gleicher Zeit der Punkt L des Rades E einen Bogen $LN = LM = \frac{KL \times AC}{KA}$, und der Punkt O des Getriebes G beschreibet einen ähnlichen Bogen OZ. Es ist aber

$$QL : QO :: LN : OZ$$

$$QL : QO :: \frac{KL \times AC}{KA} : OZ$$

$$\text{daher } OZ = \frac{KL \times AC \times QO}{KA \times QL}$$

Während daß der Punkt O des Getriebes G den Weg OZ durchläuft, so leget der Punkt O des Rades H den gleichen Weg OX zurück, so daß auch

$$OX = \frac{KL \times AC \times QO}{KA \times QL}$$

In der nämlichen Zeit beschreibet der Punkt R des Wellbaumes I den mit OX ähnlichen Bogen RS, und es ist

$$TO : TR :: OX : RS$$

$$TO : TR :: \frac{KL \times AC \times QO}{KA \times QL} : RS$$

$$\text{daher } RS = \frac{KL \times AC \times QO \times TR}{KA \times QL \times TO}$$

Immer in der nämlichen Zeit steiget das Gewicht U um UV = RS, so daß auch

$$UV = \frac{KL \times AC \times QO \times TR}{KA \times QL \times TO}$$

Das Gleichgewicht erfordert, daß

$$P \times AC = U \times UV$$

oder

$$P \times AC = U \times \frac{KL \times AC \times QO \times TR}{KA \times QL \times TO}$$

$$\text{oder } P = U \times \frac{KL \times QO \times TR}{AK \times QL \times TO}$$

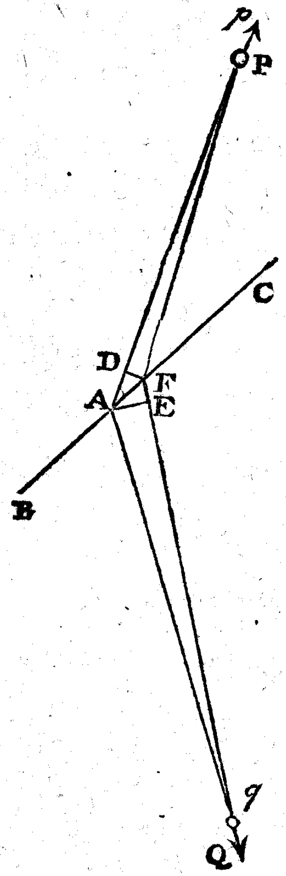
oder

$$P : U :: (KL \times QO \times TR) : (KA \times QL \times TO)$$

das heißt: die Kraft verhält sich zur Resistenz wie das Produkt aller Halbmesser der Getriebe und des Wellbaumes, zum Produkte des Hebels AK und aller Halbmesser der Räder, wie auch sonst die Statik lehret.

§. 10.

Bevor wir zur schiefen Ebne schreiten, wollen wir überhaupt einen Punkt A betrachten, der sich nicht anders



als

als in der Linie BC bewegen kann, und der zugleich durch zwei Kräfte P und Q gezogen wird. Gesetzt die Kraft P bekomme das Uebergewicht, und der Punkt A gehe bis F, unendlich nahe bei A, so daß die Kräfte jetzt in den Richtungen Fp, Fq wirken, und noch für parallel mit sich selbst gehalten werden können. Fälle FD senkrecht auf AP und AE senkrecht auf FQ, so ist die Kraft P vorwärts gegangen um Pp = AD, und die Kraft Q ist rückwärts gegangen Qq = FE. Das Gleichgewicht erfordert demnach, daß

$$P \times AD = Q \times FE$$

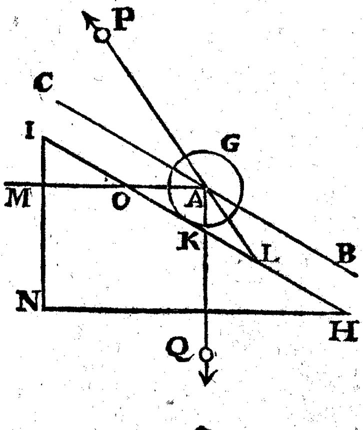
oder $P : Q :: FE : AD$

Nimmt man AF zum Halbmesser, so ist FE = Cos. AFq = Cos. BAQ, und AD = Cos. FAD = Cos. CAP, also ist im Falle des Gleichgewichtes

$$P ; Q :: \text{Cos. } QAB : \text{Cos. } PAC$$

das heißt, es verhalten sich beide Kräfte umgekehrt wie die Kosinusse der Winkel die sie mit der Linie BC machen.

Zusatz I. Es sei G ein schwerer Körper auf einer schiefen Ebne HI, und AP die Richtung einer Kraft P die



ihn

ihn in Gleichgewicht halten soll, so stelle man sich anstatt des schweren Körpers G einen bloßen Punkt A vor, der sich nicht anders als in der Linie BC mit HI parallel bewegen kann, und anstatt des Gewichtes des Körpers setze man eine Kraft Q, die lothrecht von oben herunter wirket. Das Gleichgewicht erfordert also, daß

P : Q :: Cos. QAB : Cos. PAC

Es ist aber Cos. QAB = Cos. QKH = sin. KHN = sin. IHN, und Cos. PAC = Cos. PLI. Also

P : Q :: sin. IHN : Cos. PLI

das heißt: die Kraft verhält sich zur Resistenz wie der Sinus des Winkels den die Ebne mit dem Horizonte machet, zum Kosinus des Winkels den die Kraft mit der schiefen Ebne machet.

Zusatz II. Wenn die Kraft P in der Richtung AC, mit HI parallel ziehet, so wird Cos. PLI = R (radius) also ist in diesem Falle

P : Q :: sin. IHN : R

oder, wenn man IH zum Radius nimmt

P : Q :: IN : HI

nämlich, die Kraft verhält sich in diesem Falle zur Resistenz wie die Höhe der schiefen Ebne zu ihrer Länge.

Zusatz III. Zöge die Kraft P in der horizontalen Richtung AM, so wäre Cos. MAC = Cos. MOI = Cos. NHI, alsdann ist

P : Q :: sin. IHN : Cos. NHI

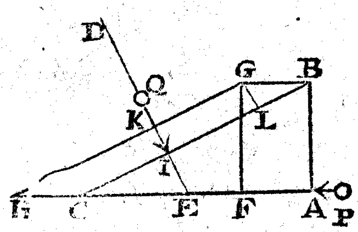
P : Q :: IN : HN

oder die Kraft verhält sich zur Resistenz wie die Höhe der schiefen Ebne zu ihrer Basis.

Alle diese Lehrsätze sind schon längst durch andere Wege in der Statik bewiesen.

§. 11.

Es sei ABC ein rechtwinklichtes Dreieck, welches sich nicht anders als in einer Ebne längs seinem Katheten AC oder



dessen Verlängerung bewegen kann. Dieses werde durch zwei Kräfte gereizet, wovon die eine P in der Richtung AC, die andere Q aber in einer Linie DE wirket, welche gegen BC senkrecht ist, und aus welcher die Kraft nicht weichen kann. Gesetzt die Kraft P gehe vorwärts und treibe das Dreieck ABC in die Lage FGH, so muß die Kraft Q um IK zurücktreten, und das Gleichgewicht erfordert, daß

$$P \times AF = Q \times IK$$

oder $P : Q :: IK : AF$

Ziehe BG und fälle GL senkrecht auf BC, so ist $BG = AF$, $GL = KI$. Also $P : Q :: GL : BG$.

Die Dreiecke BGL und BCA sind ähnlich, weil jedes einen rechten Winkel hat, und weil die Wechselwinkel GBC und BCA gleich sind, also ist

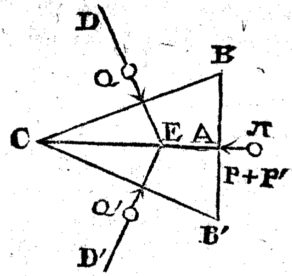
$$GL : GB :: AB : BC$$

folglich $P : Q :: AB : BC$

nämlich: die Kräfte verhalten sich wie die Seiten, auf welche sie wirken.

Zusatz

Zusatz I.



Wenn zwei solche Dreiecke ABC, AB′C verbunden werden, so bilden sie ein gleichschenklichtes Dreieck BB′C, und wenn auf beide Seiten gleiche Kräfte Q und Q′ in den unveränderlichen Richtungen DE und D′E wirken, so müssen auch zur Erhaltung des Gleichgewichtes bei A zwei Kräfte P und P′ angebracht werden, wovon die eine der Resistenz Q, die andere aber der Resistenz Q′ entgegen arbeite, und man hat

$$P = \frac{Q \times BA}{BC}$$

$$P' = \frac{Q' \times B'A}{B'C}.$$

Da nun alles beiderseits gleich ist, so kömmt

$$P + P' = \frac{2Q \times BA}{BC}$$

oder wenn man anstatt $P + P'$ bei A eine einzige Kraft π anbringet, so ist

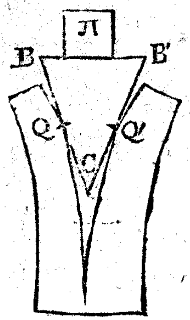
$$\pi = \frac{2Q \times BA}{BC}$$

daher $BC : BA :: 2Q : \pi$

oder

oder $2BC : 2BA :: 2Q : \pi$
oder $(BC + B'C) : (BA + B'A) : (Q + Q') : \pi$
oder $(BC + B'C) : BB' :: (Q + Q') : \pi$

Zusatz II.

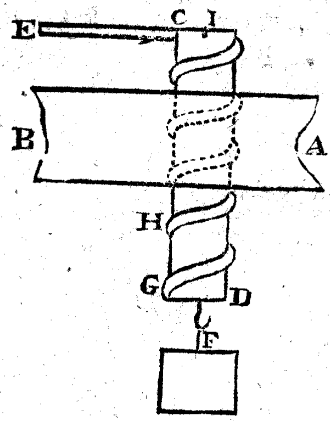


Ein gleichschenkliger Keil kann als eine Zusammensetzung von lauter Dreiecken wie $BB'C$ betrachtet werden. Gegen die Seiten BC und $B'C$ wirket senkrecht die Resistenz Q und Q' des Holzes. Auf den Kopf BB' des Keiles kann ein Gewicht π geleget werden, welches den Keil so drücket, daß er nicht zurücktreten, aber auch nicht weiter eindringen könne. Folglich, wie sich die Summe der Seiten des Keiles $(BC + B'C)$ zur Breite des Kopfes (BB') verhält, so muß sich im Zustande des Gleichgewichtes der Druck $(Q + Q')$ des Holzes gegen den Keil, zum aufgelegten Gewichte π verhalten.

Anmerkung. Die Wirkung eines Schlages auf den Keil gehöret nicht hierher, indem nur bloß von drückenden (nicht stoßenden) Kräften, die gegen einander wirken, die Rede ist.

§. 12.

Es sei im horizontalen Balken AB (folg. Fig.) eine unbewegliche Schraubenmutter. Durch diese gehe die vertikale



tikale Schraube CD, welche vermittelst des Handgriffs oder Armes CE gedrehet wird, und zugleich das Gewicht F hebet. Es wird angenommen, daß die Kraft bei E immer senkrecht gegen CE, und in einer horizontalen Ebne wirket.

Jedesmal wenn die Kraft E einen Zirkel beschreibet der IE zum Halbmesser hat, so steiget die Last F um eine Schraubenstuffe GH. Der Durchmesser eines Zirkels verhalte sich zum Umkreise überhaupt wie 1 zu π, so beschreibet die Kraft E bei jeder Umdrehung einen Umkreis $= 2\,IE.\pi$. Will man die Bewegung nur in einem unendlich kleinen Zeittheilchen betrachten, so beschreibe die Kraft einen Theil ihres Umkreises $= \frac{2\,IE.\pi}{n}$, wo n eine unendlich-große Zahl bedeuten soll. Dann beschreibet die Last auch eine vertikale Linie $= \frac{GH}{n}$, und dieser zurückgelegte Weg ist

ihrer

ihrer natürlichen Richtung von oben nach unten zuwider. Das Gleichgewicht erfordert also, daß

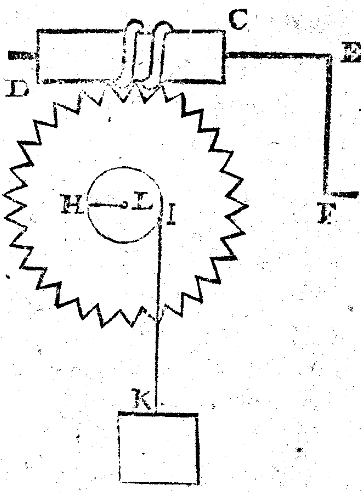
$$E \times \frac{2IE.\pi}{u} = E \times \frac{GH}{n}$$

oder $E \times 2IE.\pi = F \times GH$

oder $E : F :: GH : 2IE\pi$

das heißt: die Kraft verhält sich zur Resistenz, wie die Höhe einer Schraubenstuffe zum Umkreise den die Kraft zu beschreiben hat.

Zusatz I. Die Schraube ohne Ende bestehet aus einem Zylinder CD, woran sich ein paar Schraubengänge befinden, und welcher vermittelst einer Kurbel EF gedrehet



wird. Es wird angenommen, daß die Kraft bei F ihrer Richtung nach immer gegen EF senkrecht ist, und daß [illegible]e

in

in der Ebne des Zirkels wirket, welchen EF beschreiben muß, wenn die Maschine in Bewegung ist. Die Schraubengänge, oder wenigstens einer, treiben ein Sternrad G, indem bei jeder Umdrehung der Kurbel EF ein neuer Zahn gefasset wird. Mit dem Sternrade drehet sich zugleich der Wellbaum L, um welchen sich ein Strick IK wickelt, welcher die Last K trägt.

Gesetzt eine Kraft bei F drehe die Kurbel EF einmal herum, so beschreibet diese Kraft den Umkreis $2EF\pi$. Zugleich rücket ein Zahn des Rades G fort. Die Anzahl der Zähne sei m, so muß die Kraft F den Umkreis $2EF\pi$, m mal oder den Weg $2EF\pi m$ beschreiben, bis daß das Rad G ganz herum ist. Dann ist auch der Wellbaum L ganz herum, und die Last hat, ihrer Richtung zuwider, einen Weg zurückgelegt, welcher so viel beträgt als der Umkreis des Wellbaumes, nämlich $2HL\pi$.
Also ist zum Gleichgewicht erforderlich, daß

$$F \times 2EF\pi m = K \times 2HL\pi$$

oder $F \times EF \times m = K \times HL$

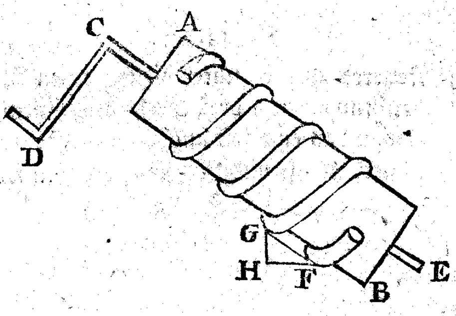
oder $F : K :: HL : (m. EF)$

das heißt: **die Kraft verhält sich zur Resistenz, wie der Halbmesser des Wellbaumes zur Länge der Kurbel, so vielmal genommen, als Zähne am Rade vorhanden sind.**

Das nämliche Resultat erfolget, wenn man anstatt einer ganzen Umdrehung des Wellbaumes nur einen unendlich-kleinen Theil dieser Umdrehung betrachtet; dann hat man $\frac{2HL\pi}{n}$ anstatt $2HL.\pi$ und $\frac{2EF.\pi m}{n}$ anstatt $2EF\pi m$, wo n eine unendlich-große Zahl ist. Diese aber verschwindet aber in der Proporzion, wie vorher bei der gewöhnlichen Schraube.

Zusatz

Zusatz II. Obgleich die archimedische Schraube gemeiniglich nur beim Wasserbau empfohlen wird, so kann sie doch auch als ein Hebezeug für trockene Körper gebrauchet werden.



Um einen Zylinder AB ist eine bleierne Röhre in Gestalt einer Schraube gewunden, in welche unten eine Kugel geleget wird, die den Raum der Röhre nicht ganz ausfüllet. Der Zylinder wird vermittelst einer Kurbel CD um seine Axe CE herum gedrehet: dann steiget die Kugel in der Röhre, bis daß sie oben herausfällt.

Eine Kraft in D, welche wie bei den übrigen Schrauben gerichtet ist, drehe den Hebel CD einmal herum, so hat sie einen Weg zurückgeleget, der $2CD\pi$ beträgt. Unterdessen ist die Kugel von F bis G um eine Schraubenstufe in schiefer Richtung gestiegen. Ziehe FH horizontal und GH vertikal, so ist die Kugel eigentlich nur um GH ihrer Richtung zuwider aufwärts gekommen. Es ist aber $GH = GF. \sin. GFH$, und GFH ist der Neigungswinkel der Maschine gegen den Horizont. Wenn wir demnach das Gewicht der Kugel mit K benennen, so muß im Falle des Gleichgewichtes, sein

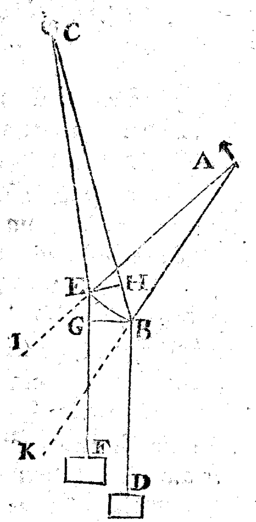
$$D \times 2CD.\pi = K \times GF. \sin. GFH$$

oder $D : K :: GF. \sin. GFH : 2CD\pi$

das heißt: die Kraft verhält sich zur Resistenz, wie das Produkt aus der Stufenhöhe und dem Sinus des Neigungs-Winkels der Maschine (für den Halbmesser 1), zum Umkreise den die Kraft beschreibet.

§. 13.

Einige Neueren rechnen unter die einfachen Maschinen diejenige Einrichtung, wo drei Seile aus einem Knoten ausgehen, wovon das eine fest angebunden ist, die beiden übrigen aber durch Kraft und Resistenz gezogen werden.



Es seien die Seile AB, BC, BD in einem Knoten B verbunden. AB sei an einem Nagel in A befestiget, BD werde durch ein Gewicht D, und BC durch eine Kraft C gezogen. Gesetzt es geschehe eine kleine Bewegung; AB komme

komme in die Lage AE, indem der Punkt B den kleinen Zirkelbogen BE beschreibet der für eine gerade auf AB senkrechte Linie angesehen werden kann. Zugleich komme CB in die Lage cE und BD in die Lage EF. Fälle EH senkrecht auf CB und BG senkrecht auf EF. So ist BH die positive virtuelle Geschwindigkeit der Kraft C, und GE ist die negative virtuelle Geschwindigkeit der Resistenz D. Daß Gleichgewicht setzet voraus, daß

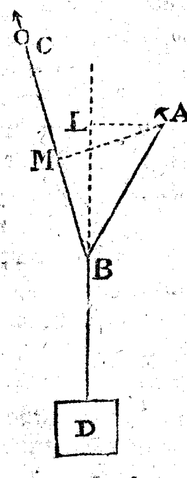
$$C \times BH = D \times EG$$

oder $C : D :: EG : BH$

Nimmt man EB zum Halbmesser, so ist $BH = \text{Cos. } EBH = \text{sin. } CBA$, weil nämlich $\angle EBA = 90^g$

Ferner ist $EG = \text{Cos. } BEG$. Man verlängere AE nach I, und AB nach K, so ist $\text{Cos. } BEG = \text{sin. } GEI$, (weil $BEI = 90^g$) $= \text{sin. } DBK$ (weil AK und AI für parallel geachtet werden) $= \text{sin. } ABD$ (weil der Winkel DBK und sein Supplement einerlei Sinus haben). Folglich ist

$$C : D :: \text{sin. } ABD : \text{sin. } CBA$$



das heißt: C und D verhalten sich umgekehrt wie die Winkel welche das dritte Seil AB mit ihren Richtungen machet.

Zusatz. Man verlängere DB (vorige Fig.) und fälle aus einem Punkte A der AB, die AL senkrecht auf diese Verlängerung. Man fälle auch AM senkrecht auf BC, so ist, wenn man AB zum Halbmesser nimmt, AL der Sinus des Winkels ABL oder ABD, und AM ist der Sinus des Winkels CBA. Also ist auch

$$C : D :: AL : AM$$

das heißt: C und D verhalten sich umgekehrt wie die Linien die aus irgend einem Punkte der AB auf ihre Richtungen senkrecht gefället werden, welches mit den Gesetzen der Statik stimmet.

§ 14.

Die angeführten Exempel geben hinlänglich zu erkennen, wie bei allerlei Maschinen durch den bloßen Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten das Verhältniß zwischen Kraft und Resistenz für den Zustand des Gleichgewichtes bestimmet werden kann, und beweisen also den Nutzen dieses Grundsatzes. Wie zusammengesetzt eine Maschine auch sein mag, so läßt sich das Verhältniß zwischen Kraft und Resistenz für den Zustand des Gleichgewichtes sehr leicht bestimmen, sobald man nur bemerken kann, um wie viel, wenn die Maschine in Bewegung ist, Kraft und Resistenz zu gleicher Zeit vorwärts oder rückwärts gehen. Diese Zeit muß nothwendig unendlich klein angenommen werden, wenn die Maschine so beschaffen ist, daß das Verhältniß zwischen Kraft und Resistenz sich allmälig verändert. Die Zeit kann aber auch endlich angenommen werden, wenn das besagte Verhältniß keine Veränderung findet, wie z. E. in den gewöhnlichen Fällen bei Flaschenzügen, Winden und Schrauben.

Nachricht des Verlegers.

Da verschiedene Personen, die mit einigen mathematischen Schriften des Hrn. Verfassers bekannt sind, sich auch bei mir, wegen der übrigen erkundiget haben, so will ich, bei Gelegenheit der Erscheinung dieser **Hydraulik**, hier kürzlich anzeigen, was Herr Bürja bisher herausgegeben und welche Gegenstände der Mathematik er abgehandelt hat.

1) Der selbstlernende **Algebrist**, oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst, worunter sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra, als auch die Differenzial- und Integralrechnung begriffen ist, 2 Theile, gr. 8., mit Titelkupfer 1786. 1 thlr. 12 gr., — ist eine vollständige Abhandlung von der Rechenkunst, sowohl mit Ziffern, als auch mit Buchstaben. Der zweite Band ist größtentheils der Differenzial- und Integralrechnung gewidmet.

2) Der sebstlernende **Geometer**, oder deutliche Unterweisung zur Meßkunst, worin sowohl die Euklidische, als auch die geradlinigte und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum

Nivelliren und Landmessen enthalten ist. 2 Thle gr. 8. mit 525 Holzschnitten und einem Titelkupfer, 1787. 2 thlr. 12 gr. — Der angeführte vollständige Titel giebt schon hinlänglich den Inhalt dieses Werkes zu erkennen.

3) **Erleichterter Unterricht in der höhern Meßkunst**, oder deutliche Anweisung zur Geometrie der krummen Linien, 2 Bände, gr. 8. mit 229 Holzschnitten u. einem Titelk. 1788. 2 thlr. 12 gr. — hebet an mit der Lehre von den Kegelschnitten. Hierauf folget die Lehre von den krummen Linien überhaupt, ihren Tangenten, Halbmessern der Krümmung, größten und kleinsten Applikaten, ihrer Quadratur und Kubatur. Die logarithmische Linie und die Zykloide sind, wegen ihrer Wichtigkeit, in besondern Hauptstücken vorgenommen worden. Auch von doppelt gekrümmten Linien und von krummen Flächen findet man hier einen Unterricht.

4) **Grundlehren der Statik**, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher vom Gleichgewichte bei festen Körpern und Maschinen handelt, gr. 8. mit 165 Holzschnitten und Titelk. 1789. 1 thlr. 8 gr. Diese enthalten erstlich die allgemeinen Kenntnisse in Betreff der Bewegung und des Gleichgewichtes. Hierauf wird geschritten zum Hebel und zur Waage,

zu

zu den Schwerpunkten, zu den gebräuchlichsten Maschinen, zu Guldins Regel zur Kettenlinie und zur elastischen Linie.

5) Grundlehren der Hydrostatik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher vom Gleichgewichte des Wassers, der Luft, und überhaupt aller flüssigen Materien, wie auch von denen auf diesem Gleichgewicht gegründeten Maschinen handelt, gr. 8. mit Titelk. und 121 Holzschnitten 1790, 1 thlr. — Hier findet man außer den Gegenständen die im Titel ausdrücklich angezeiget sind, die Lehren vom Drucke der Luft, von Barometern und Thermometern, von der Höhenmessung durch das Barometer, von den Luftbällen.

6) Grundlehren der Dynamik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher von den festen Körpern im Zustande der Bewegung handelt, gr. 8. mit Titelk. und 160 Holzschnitten, 1791. 1 thlr. 8 gr. — In diesem Werke werden sowohl die scheinbaren als auch die wirklichen Bewegungen der festen Körper untersucht. Zu diesen Untersuchungen gehören die Lehren von gestoßenen Körpern, von fallenden Körpern, vom Pendel, von der drehenden Bewegung, von Zentralkräften, und von der Bewegung der Schwerpunkte.

7) Grundlehren der Hydraulik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher von der Bewegung und dem Widerstande flüssiger Materien handelt, gr. 8. mit ungefähr 90 Holzschnitten und einem Titelk. 792. 1 thlr. 4 gr. — ist die gegenwärtige Schrift, deren Inhalt nach der Vorrede besonders angezeiget worden.

Da mit der Hydraulik die mechanischen Wissenschaften beschlossen sind; so werden zu diesem Bande 4 Haupttitel geliefert, welche den No. 4. 5. 6 und 7 bezeichneten Werken vorgebunden werden können.

In Rücksicht dessen, daß diese 10 Bände an 1300 Holzschnitte enthalten, welche im Texte beigedruckt worden, wird wohl niemand den Preis von 11 thlr. 8 gr. zu theuer finden. Jedoch um die Anschaffung derselben noch mehr zu erleichtern, bin ich nicht abgeneigt, demjenigen einige Vortheile zu bewilligen, welcher sich directe und Postfrey an mich wendet.

F. T. Lagarde.
Buchhändler in Berlin.

Berichtigungen der Dynamik.

Einer meiner Leser hat die Güte gehabt, mir folgende Druckfehler mitzutheilen, die er bei Durchlesung meiner Grundlehren der Dynamik bemerket hat.

Seite.	Zeile.	Falsch.	Recht.
14.	9. von oben.	Beweguug.	Begegnung
20.	6 v. unt.	EK	FK
31.	13 v. ob.	OC	OG
46.	10 v. unt.	BG	BF
—	7. v. unt.	AF	AG
—	5. v. unt.	BG	BF
—	4 v. unt.	GA	FA
—	3. v. unt.	BF	BG
63.	8. v. ob.	MG — *mx*	MG — M*x*

An den Buchbinder.

Wenn der Buchbinder die Statik, Hydrostatik, Dynamik und Hydraulik zugleich zu binden bekömmt, so kann er die vier Titelblätter gebrauchen, worauf stehet: Grundlehren aller mechanischen Wissenschaften und den besonderen Titel Grundlehren der Hydraulik ganz weglassen. Bekömmt er aber die Hydraulik allein, so müssen die vier allgemeine Titel weggelassen und nur der besondere für die Hydraulik gebraucht werden. Indessen ist es am besten, daß er sich erst nach dem Willen den Besitzers erkundige. Nach dem Titelkupfer und Titel folget wie gewöhnlich die Zueignungsschrift, die Vorrede und der Inhalt. Am Ende des Buches wird die Nachricht des Verlegers angehängt, wie auch die Berichtigungen.